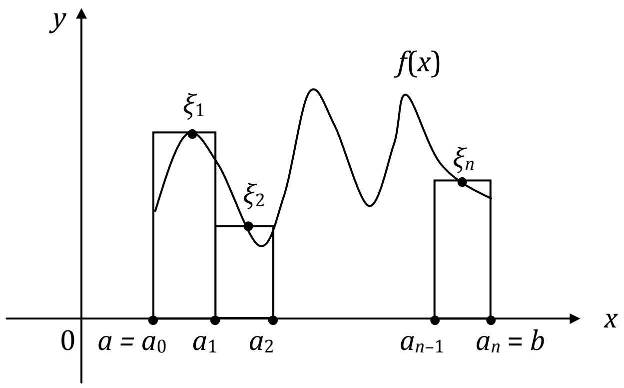
Математический анализ. Конспект лекций.

Оглавление

Определенный интеграл и его приложения

Интеграл Римана



Интегрируемая функция $f(x)$ ограничена на интервале $[a, b]$:

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Рассмотрим некоторое разбиение P интервала $[a,b]$ (см. рис), содержащее $a_0 = a$, a_1, .. $a_n = b$. Для разбиений вводятся *отношения частичного порядка*. Например, $P_1 \succ P_2$ (P_1 мельче P_2): P_1 получается из P_2 путем деления на более мелкие части и.т.п. Разумеется, не все разбиения сравнимы, а только те, которые содержат хотя бы одно общее a_i, кроме концов интервала $[a,b]$.

Для данного разбиения введем *верхнюю* $U(P, f)$ и *нижнюю* $L(P,f)$ *интегральные суммы* (Дарбу) следующим образом:

$$\Delta x_i = a_i - a_{i-1}$$

$$M_i = \sup_{a_{i-1} < x \leq a_i} f(x)\,;\; U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$m_i = \inf_{a_{i-1} < x \leq a_i} f(x)\,; L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

С измельчением разбиения P верхние суммы уменьшаются, а нижние – увеличиваются. Введем тогда *верхний и нижний интегралы*

$$\overline{\int} f(x)\mathrm{d}x = \inf_P U(P,f)\,, \underline{\int} f(x)\mathrm{d}x = \sup_P L(P,f).$$

Если нижний интеграл равен верхнему, говорят что функция $f(x)$ интегрируема на интервале $[a,b]$ и существует *интеграл Римана* (*определенный интеграл*)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Введем (для удобства) просто *интегральную сумму*, находящуюся между U и L и являющуюся, соответственно, аппроксимацией определенного интеграла:

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,, a_{i-1} < \xi_i \leq a_i.$$

Очевидно, определенный интеграл является *пределом интегральных сумм*.

С использованием S за счет линейности суммы можно легко доказать, что интеграл суммы равен сумме интегралов, а константа выносится за знак интегрирования (линейность операции интегрирования) и т.д.

Неравенство Коши-Буняковского

1) Для чисел

$$x_i, y_i \geq 0, i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Доказательство:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} - \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} - 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

$$0 \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

2) Для интегралов

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Доказательство: рассмотрим интегральную сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\, g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i \sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\Delta x_i}.$$

Устремим

$$\max_{i \leq n} \Delta x_i \to 0$$

и получим искомое соотношение.

Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и некоторая точка $a_0 \in [a, b]$. Определим *интеграл с переменным верхним пределом* как функцию

$$F(x) = \int_{a_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \ \ (x > a_0); \ F(x) = -\int_{x}^{a_0} f(t)\mathrm{d}t \ \ (x < a_0).$$

Очевидно, $F'(x) = f(x)$. Введем

$$\Phi(x) = \int_{x}^{b_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_0}^{b_0} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \,, b_0 \in [a, b]$$

$\Phi'(x) = 0 - f(x)$. $F(x)$, таким образом, одна из первообразных $f(x)$. С другой стороны,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b_0) - F(a_0) = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

где $\Phi(x)$ – любая из первообразных $f(x)$. Полученная нами формула носит название *формулы Ньютона-Лейбница*. Согласно ей, приращение любой первообразной равно определенному интегралу. Формула устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралами; она часто (но не всегда) используется для вычисления значения определенного интеграла. Например, нельзя с ее помощью посчитать интеграл нечетной функции $f(x)$

$$\int_a^{-a} f(x)\mathrm{d}x.$$

Формула замены переменных в определенном интеграле

Пусть имеются функции $f(x)$ – непрерывная на интервале $[a, b]$ и $\varphi(t)$ – дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

называемая *формулой замены переменных*.

Вывод ее опирается на такую же формулу для неопределенного интеграла:

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t\Big|_\alpha^\beta = \int f(x)\mathrm{d}x\Big|_a^b, x = \varphi(t) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Для определенного интеграла справеливо соотношение

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

называемое *формулой интегрирования по частям*.

Доказательство:

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\int_a^b \big(f(x)g(x)\big)'\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g'(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g'(x)f(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b.$$

Теорема о среднем для определенных интегралов

Пусть функция $f(x)$ – непрерывная на интервале $[a, b]$. Тогда можно записать

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\vartheta)(b-a), \vartheta \in [a, b].$$

Это утверждение носит название *теоремы о среднем для интегралов*.

Доказательство: Применим обычную теорему о среднем и формулу Ньютона-Лейбница.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\vartheta)(b-a).$$

Примеры вычисления определенных интегралов

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\, a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$2)\ \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + x\operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

$$3)\ \int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - e + 1 = 1.$$

$$4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, e^x\mathrm{d}x = I.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}(e^x) = \sin x\, e^x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}(e^x) = e^{\frac{\pi}{2}} - \cos x\, e^x|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, e^x\mathrm{d}x = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I$$

$$2I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$$

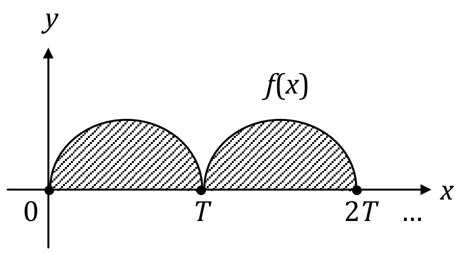
$$I = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right).$$

Об интегрировании периодических функций

Пусть функция $f(x)$ имеет период T. Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

Графически это можно изобразить так:



Формальное доказательство:

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = |x = t + T| = \int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_k(x),$$

где остаточный член $r_k(x)$ можно записать в форме Пеано: $o(x - x_0)^k$ и в форме Лагранжа:

$$\frac{f^{(k+1)}(C)(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Пусть функция $f(x)$ имеет $(k+1)$ непрерывную производную, тогда

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u(t) = f'(t) \\ v(t) = \dfrac{(x-t)^2}{2!} \\ \mathrm{d}u(t) = f''(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v(t) = (t - x)\mathrm{d}t \end{array} \right| = f(x_0) + \int_{x}^{x_0} u(t)\mathrm{d}v(t) = f(x_0) + u(t)v(t)\Big|_{x}^{x_0} -$$

$$- \int_{x}^{x_0} v(t)\mathrm{d}u(t) = \dots = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{(k+1)!}\mathrm{d}t,$$

где остаточный член

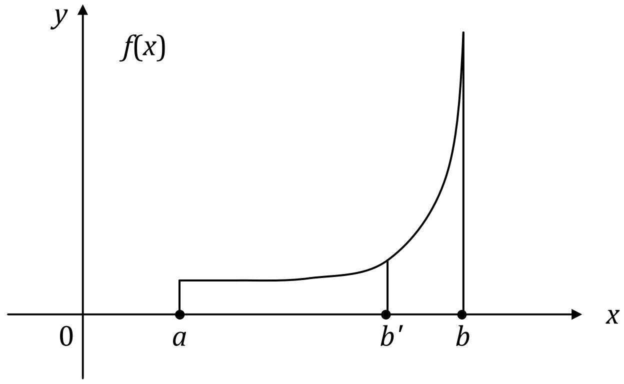
$$r_k = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{(k+1)!}\mathrm{d}t.$$

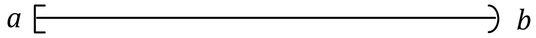
Несобственные интегралы

– это интегралы от функций с *особенностями*, не позволяющими воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница непосредственно.

Пусть задана функция $f(x)$, которую требуется проинтегрировать на интервале $[a, b]$. Возможно несколько вариантов:

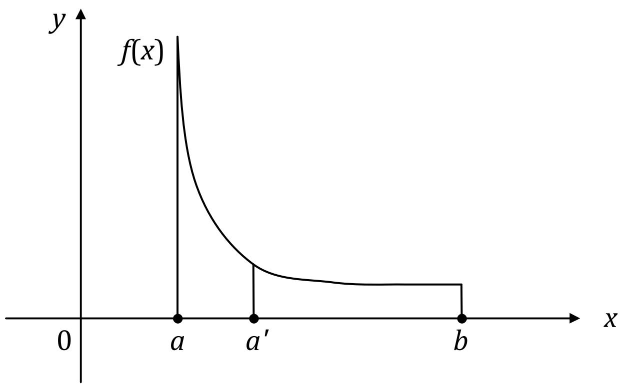
1) Особенность в b.

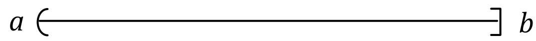




$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b' \to b} \int_{a}^{b'} f(x)\mathrm{d}x.$$

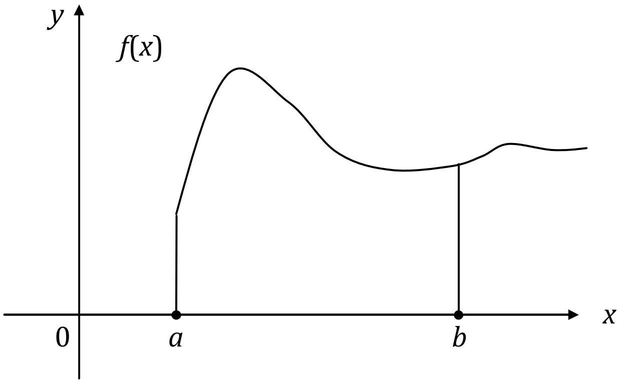
2) Особенность в a.

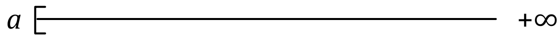




$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a' \to a} \int_{a'}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

3) Особенность в $+\infty$.





$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

4) Особенность в $-\infty$.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5) Несколько особенностей.
Интеграл разбивается на несколько подинтегралов так, чтобы на каждом интервале интегрирования была только одна особенность. Такой интеграл *сходится* (предел равен конечному числу), если сходятся все подинтегралы.

Простейшие несобственные интегралы

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_0^1$ $(\alpha \neq 1)$ – сходится при $\alpha > 1$.

$\alpha = 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x|_0^1$ – расходится.

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_1^\infty$ – сходится при $\alpha > 1$.

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_0^\infty$ – расходится $\forall\alpha$.

4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}|_0^\infty = 0-(-1) = 1.$

Критерии сходимости несобственных интегралов

1) *Критерий Коши* (хорош *для теории, а не для практики*).

$b \leq \infty$ – особая точка.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists b_0, a < b_0 < b, b_0 < b' < b'' < b \Rightarrow \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Доказательство:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \to \lim_{x\to b}\Phi(x)\,, a < b_0 < b < b' < b'' < b, |\Phi(b') - \Phi(b'')| \leq \varepsilon$$

$$\Phi(b') - \Phi(b'') = \int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x.$$

2) Интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *сходится абсолютно*, если сходится $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. Если сходится лишь $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, говорят, что интеграл *сходится условно*.
Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_0, b > b', b'' > b_0$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

3) Пусть даны функции $0 \le f(x) \le g(x)$, определенные на интервале $[a, b]$.
Если интеграл от большей функции $g(x)$ (*мажоранты*) сходится, то и интеграл от меньшей функции сходится:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

Если интеграл от меньшей функции $f(x)$ расходится, то и интеграл от большей функции расходится:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \infty.$$

Так получается за счет условия сходимости

$$\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{b'}^{b''} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon\ (b_0 < b' < b'' < b).$$

Если существует предел

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha > 0,$$

то функции $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно:

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2\alpha\ (b > x > b_0)$$

$$f(x) \le g(x)$$

$$\frac{\alpha}{2} g(x) \le f(x) \le g(x)2\alpha.$$

Примеры на сходимость несобственных интегралов

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\,;\ \varepsilon > 0, \infty < b'' < b' > b_0$

$$\left|\int_b^{b''}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^{b''}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{x}\right| = \left|\frac{\cos x}{x}\Big|_{b'}^{b''} + \int_b^{b''}\cos x\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right| \le \frac{1}{b'} + \left|\int_b^{b''}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right| \le \frac{2}{b'} \le \frac{2}{b_0} < \varepsilon, b_0 > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Покажем, что этот интеграл не сходится абсолютно:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_{\pi(n-1)}^{\pi n}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_{\pi(n-1)+\frac{\pi}{4}}^{(n-1)\pi+\frac{3\pi}{4}}|\sin x|\mathrm{d}x \ge C_0\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n} \ge C_0\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty.$$

2) $\int\limits_0^\infty \sin kx\, e^{-x} \mathrm{d}x$ – сходится за счет $\sin kx\, e^{-x} \leq e^{-x}$.

3) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \sim \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}\ (x \to 0)$ – расходится.

4) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin \sqrt{x}}$ – расходится (по тем же причинам).

5) $\int\limits_0^\infty (x^2 - 3x + 5)e^{-x} \mathrm{d}x$

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - 3x + 5)e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

$$(x^2 - 3x + 5)e^{-x} = (x^2 - 3x + 5)e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \to 0\ (x \to \infty)$$

$$(x^2 - 3x + 5)e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}}\ (x > x_0).$$

Признак Дирихле условной сходимости несобственного интеграла

Интеграл

$$\int\limits_a^b \varphi(x) g(x) \mathrm{d}x\,, b = \infty$$

сходится, если выполнены два следующих условия.

1) $\Phi(x)$ – первообразная $\varphi(x)$:

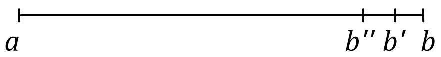
$$\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(x) \mathrm{d}x$$

Будем считать $\Phi(x)$ ограниченной функцией: $\Phi(x) \leq M$.

2) $g(x)$ дифференцируема и монотонно убывает к 0:

$$g(x) \downarrow 0.$$

Доказательство: Воспользуемся признаком Коши. $b', b'' > b$.



$$\left| \int\limits_b^{b''} \varphi(x) g(x) \mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Запишем

$$\left| \int\limits_b^{b''} \varphi(x) g(x) \mathrm{d}x \right| = \left| \int\limits_b^{b''} g(x) \mathrm{d}\Phi(x) \right|$$

и воспользуемся формулой интегрирования по частям. Получим

$$\left| -\int\limits_{b'}^{b''} \Phi(x) g'(x) \mathrm{d}x + g(x)\Phi(x) \right|.$$

Рассмотрим две части суммы. $g(x)\Phi(x) \leq M(|g(b')| + |g(b'')|) \leq 2M\varepsilon$

$$\left| -\int\limits_{b'}^{b''} \Phi(x) g'(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int\limits_{b'}^{b''} \big| |\Phi(x)| g(x) \big| \,\mathrm{d}x \leq M \int\limits_{b'}^{b''} g'(x) \mathrm{d}x \leq 2M\varepsilon.$$

Следовательно, вся сумма не превосходит $4M\varepsilon$ и может быть сделана сколь угодно малой.

Примеры на признак Дирихле

1) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\,, \varphi(x) = \sin x\,, g(x) = \frac{1}{x^\alpha}, |\Phi(x)| = |-\cos x| \le 1.$

$\alpha = 1 -$ сходится условно $\left(\frac{1}{x^\alpha} \downarrow 0\right)$.

$\alpha > 1 -$ сходится абсолютно:

$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$, а $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится абсолютно.

2) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+100}\mathrm{d}x\,, \varphi(x) = \sin x\,, |\Phi(x)| \le 1, g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \downarrow 0 \ (x \to \infty) \ \Rightarrow$ сходится.

3) $\int\limits_0^\infty x^p \sin x^q \,\mathrm{d}x = |x^q = y| = \int\limits_0^\infty y^{\frac{p}{q}} \sin y \frac{1}{q} y^{\frac{1}{q}-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{q}\int\limits_0^\infty y^{\frac{p-q+1}{q}} \sin y \,\mathrm{d}y.$

$g(y) = y^{\frac{p-q+1}{q}}, \varphi(y) = \sin y\,, |\Phi(y)| \le 1.$

Условие признака Дирихле выполняется при $p - q + 1 < 0$, т.е. $p < q - 1$.

Вычисление несобственных интегралов

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left. x^{1-\alpha}\right|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} \ (\alpha > 1).$

2) Интеграл Эйлера

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \,\mathrm{d}x = |x = 2t| = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t \,\mathrm{d}t = |\sin 2t = 2\sin t\cos t| =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t \,\mathrm{d}t + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t \,\mathrm{d}t = \left|t = \frac{\pi}{2} - \ln u\right| =$$

$$= \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t \,\mathrm{d}t + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin u \,\mathrm{d}u = \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{2} + I$$

$$I = -\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

3) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = I.$

Введем в рассмотрение параметрическое семейство интегралов

$$I(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xt}\mathrm{d}x\,, I(0) = I.$$

В данном случае можно продифференцировать $I(t)$:

$$I'(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}(-x)e^{-xt}\mathrm{d}x = -\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-xt}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty e^{-xt}\mathrm{d}(\cos x) = e^{-xt}\cos x|_0^\infty +$$

$$+t\int_0^{\infty}\cos x\, e^{-xt}\mathrm{d}x = -1 + t\int_0^{\infty} e^{-xt}\mathrm{d}(\sin x) = -1 + e^{-xt}\sin x|_0^{\infty} + t^2\int_0^{\infty}\sin x\, e^{-xt}\mathrm{d}x = -1 + t^2 I(t)$$

$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

$$I(t) = \int I'(t)dt = -\operatorname{arctg} t + C$$

Найдем C:

$$I(\infty) = 0, C = \frac{\pi}{2}$$

$$I(t) = -\operatorname{arctg} t + \frac{\pi}{2}$$

$$I = I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

4) *Гамма-функция*

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

4.1. Вопрос сходимости (по признаку Дирихле).

$$e^{-x} \text{ на } \infty \text{ растет быстрее } x^{p-1}\text{: } x^{p-1}e^{-x} \le Ce^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{1-p}} \downarrow 0 \ (\alpha < 1 \text{ и, соответственно}, p > 0).$$

4.2. Важное свойство.

Интегрированием по частям можно доказать

$$\Gamma(p) = (p+1)\Gamma(p+1) \text{ для } p > 1.$$

Итак…

$$\Gamma(p) = -\int_0^{\infty} x^{p-1}\mathrm{d}(e^{-x}) = -e^{-x}x^{p-1}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}(p-1)x^{p-2}\mathrm{d}x = (p-1)\int_0^{\infty} x^{p-2}e^{-x}\mathrm{d}x =$$
$$= (p+1)\Gamma(p+1).$$

Рассмотрим два случая нахождения значения гамма-функции:

4.2.1. $p \in \mathbb{Z}, \Gamma(p) = (p-1)!, \Gamma(2) = \Gamma(1) = 1.$

4.2.2. $p = \frac{q}{2}, q \in \mathbb{Z}$. Например, $q = 1$.

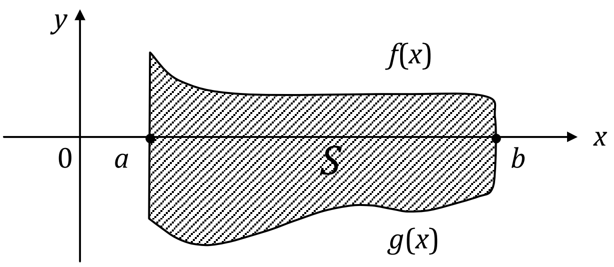
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{vmatrix} = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi},$$

где воспользовались значением *интеграла Пуассона* $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

Приложения определенного интеграла

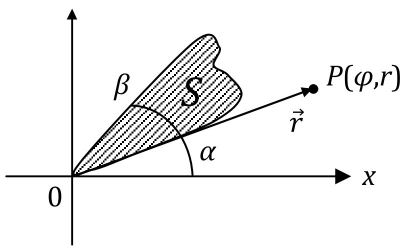
1) Вычисление площадей.

В декартовой системе координат



$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x$$

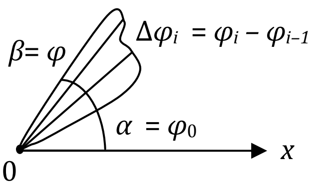
В полярной системе координат



Пусть граница области задана в виде функции $r = r(\varphi)$, где r – радиус-вектор, а φ – полярный угол, $\alpha < \varphi < \beta$. Разобьем угол на малые углы $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. При достаточной гладкости кривой площадь каждого малого участка вычислится как площадь сектора окружности

$$S_i = \frac{\Delta\varphi_i R_i^2}{2}, \text{где } R_i = r(x_i).$$

Получаем, что



$$S_i = \frac{\Delta\varphi_i r^2(t_i{}')}{2}, t_i' \in (\varphi_{i-1}, \varphi_i).$$

Общая площадь равна

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} r^2(t_i{}')\Delta\varphi_i.$$

Полученное выражение является, очевидно, интегральной суммой. Осуществив предельный переход при $n \to \infty$, найдем выражение для площади

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Примеры

1.1. Площадь круга в полярных координатах. Из параметрического уравнения окружности

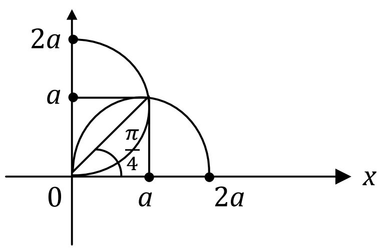
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

получим $r(\varphi) = R$. Интегрируя, находим

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \pi R^2.$$

1.2. Фигура, ограниченная двумя окружностями.

$$\begin{cases} r = 2a\cos\varphi \\ r = 2a\sin\varphi \end{cases}.$$

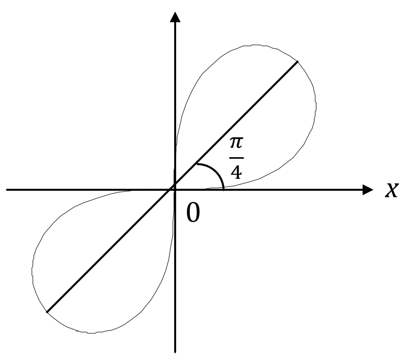


Найдем площадь из соображений симметрии (фигура, ограниченная окружностями, состоит из двух одинаковых частей, отделенных друг от друга прямой $y = x$ (идущей под углом $\frac{\pi}{4}$):

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4a^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

1.3. Лемниската Бернулли.

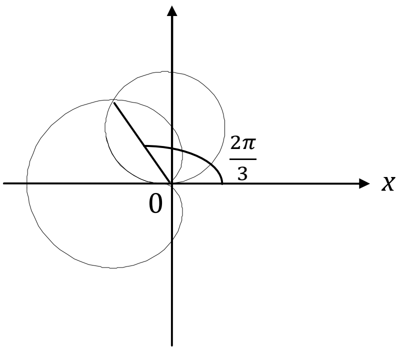
$$r^2 = a^2\sin 2\varphi, r = a\sqrt{\sin 2\varphi}.$$



Опять же из соображений симметрии площадь фигуры состоит из четырех одинаковых частей. Интегрируем:

$$S = 4\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -a^2\cos\varphi\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

1.4. Пересечение окружности и кардиоиды.



$$\begin{cases} r \le \sqrt{3}\sin\varphi \\ r \ge 1-\cos\varphi \end{cases}.$$

Находим точку пересечения: (0,0).

$$\sqrt{3}\sin\varphi = 1-\cos\varphi$$

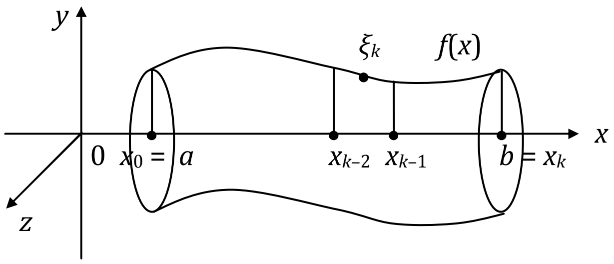
$$\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ (период опускаем).}$$

Интегрируем:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(3\sin^2\varphi - (1-\cos\varphi)^2\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

2) Вычисление объемов тел вращения.



Тело вращения получают вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси x с сохранением расстояния.

Рассматривая вращение небольшого слоя толщиной $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$ (см. рис.) вокруг оси x площадью $\pi f^2(\xi_k)$, получаем сумму

$$\sum_k \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Пример. Объем эллипсоида вращения.

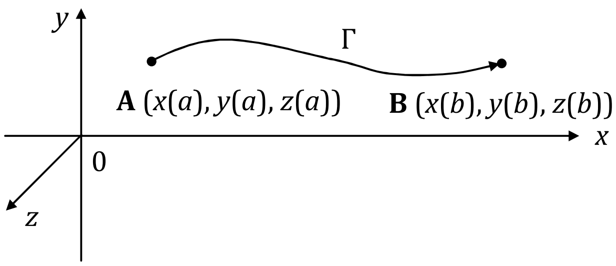
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} \le 1$$

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}} \quad (z=0)$$

$$V = \pi b^2 \int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi ab.$$

3) Вычисление длин кривых.

Пусть дифференцируемая на интервале $[a, b]$ функция задана параметрически:



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b].$$

Будем предполагать, что имеем дело с кривой без самопересечений (кроме, возможно, одного – совпадения начала кривой с ее концом).

Искать *длину кривой* станем в такой форме, которая *инвариантна* по отношению к способу ее задания. Конечный результат выглядит следующим образом.

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

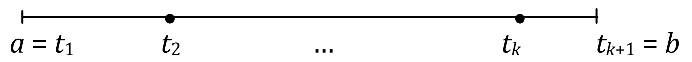
Если кривая Γ задана на плоскости функцией вида $y = y(x)$, применим подстановку $x=t$ и получим

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

Для кривой заданной в полярных координатах функцией $r = r(\varphi)$, можно путем несложных преобразований получить формулу

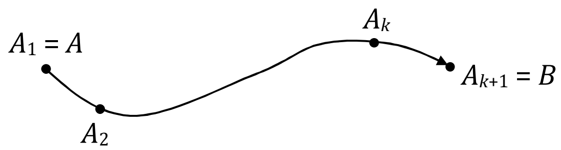
$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Вывод формулы: Разобьем интервал $[a, b]$ на точки



В соответствии с этим разбиением на кривой возникнут точки (см. рис.)

$$A = A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1} = B.$$



Длиной кривой Γ назовем предел длин ломаных линий, вписанных в данную кривую таким образом, что $\max_k \Delta t_k = \to 0$, где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Длина получившейся ломаной

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

где $\Delta x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k),\ \Delta y_k = y(t_{k+1}) - y(t_k),\ \Delta z_k = z(t_{k+1}) - z(t_k)$.
Если длина кривой как предел существует (равна конечному числу), кривую называют *спрямляемой*, иначе – *неспрямляемой*.

Заметим далее, что поскольку функции $x(t), y(t), z(t)$ дифференцируемы, можно применить теорему о среднем:

$$\Delta x_k = x'(t_k{}')\Delta t_k$$
$$\Delta y_k = y'(t_k'')\Delta t_k$$
$$\Delta z_k = z'(t_k''')\Delta t_k,$$

где $|\Gamma_N|$ преобразуется к виду

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{x'^2(t_k{}') + y'^2(t_k'') + z'^2(t_k''')}.$$

При $t_k' = t_k'' = t_k'''$ это выражение переходит в интегральную сумму. Докажем, почему это так. Будем считать интервал замкнутым. Поскольку функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны, то они равномерно непрерывны:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \colon |t - t'| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x(t) - x(t')| < \varepsilon$$
$$|y(t) - y(t')| < \varepsilon$$
$$|z(t) - z(t')| < \varepsilon.$$

Поскольку $t_k', t_k'', t_k''' \in (t_k, t_{k+1})$, можно взять интервал длиной не менее δ. Тогда запишем

$$y(t'') = y(t') + \vartheta\varepsilon;\ z(t''') = z(t') + \vartheta_1\varepsilon;\ |\vartheta|, |\vartheta_1| < 1.$$

Применим неравенство треугольника, вытекающее из рассмотрения векторов
$\vec{a}\{x'(t'),\ y'(t'),\ z'(t')\}, \vec{b}\{x'(t'), y'(t''), z'(t''')\}, \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\{0,\ y'(t') - y'(t''),\ z'(t') - z'(t''')\}$:

$$\left|\sqrt{x'^2(t_k{}') + y'^2(t_k'') + z'^2(t_k''')} - \sqrt{x'^2(t') + y'^2(t) + z'^2(t)}\right| \leq$$
$$\leq \sqrt{\left(y'(t) - y'(t'')\right)^2 + \left(z'(t) - z'(t'')\right)^2}.$$

Тогда запишем

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k) + z'^2(t_k)}\,\Delta t_k + \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\left(y'(t_k) - y'(t_k'')\right)^2 + \left(z'(t_k) - z'(t_k'')\right)^2}\,\Delta t_k.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{N} \sqrt{\left(y'(t_k) - y'(t_k'')\right)^2 + \left(z'(t_k) - z'(t_k'')\right)^2}\,\Delta t_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\vartheta_k^2 + \vartheta_{k+1}^2}\Delta t_k \le \varepsilon\sqrt{2}(b-1).$$

Ясно, что она может быть сделана сколь угодно малой. Значит,

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k) + z'^2(t_k)}\,\Delta t_k \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Примеры

3.1. Длина единичной окружности.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

3.2. Кривая, задаваемая уравнением

$$y = \frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi x}{2}, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$y' = \mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}$$

$$|\Gamma| = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\frac{\pi x}{2}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2}} = \left| \begin{matrix} \frac{\pi x}{2} = y \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\mathrm{d}y \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \cdots = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

4) Вычисление площадей поверхностей вращения.

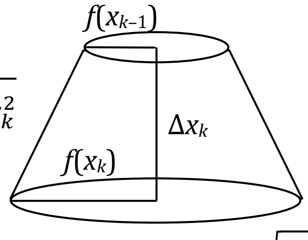
В данном случае поступим точно так же, как с вычислением объемов. Разделим интервал $[a,b]$ на полосы по x, посчитаем площадь каждой, а затем просуммируем.

Конечный результат:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

Для вывода формулы приблизим площадь каждой выделенной «полоски» усеченным конусом:

$$H = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$



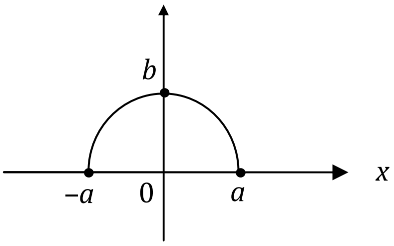
Средняя линия конуса $\pi\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right)$, направляющая $H = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$. Элемент площади

$$\Delta S = \pi\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right)\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}.$$

Полная площадь

$$S = 2\pi \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}}\Delta x_k \xrightarrow[N\to\infty]{} 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

Пример. Поверхность эллипсоида



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}, a>b.$$

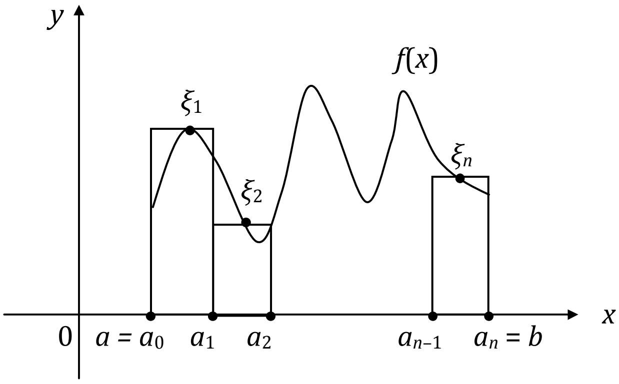
$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^2}{a^2-b^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\mathrm{d}x=\left|u=x\sqrt{a^2-b^2}\right|=\frac{4\pi b}{a^2}\int_{0}^{a\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{a^4-4u}\,\mathrm{d}u=$$

$$=|u=a^2\sin t|=\frac{2a^2\pi b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}+\cos 2\arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right).$$

Простейшие методы численного интегрирования

1) Метод прямоугольников – площадь под графиком разбивается на прямоугольники:



Площадь k-го участка разбиения

$$S_k=f(\xi_k)\Delta x_k, \text{ где } \Delta x_k=a_k-a_{k-1}.$$

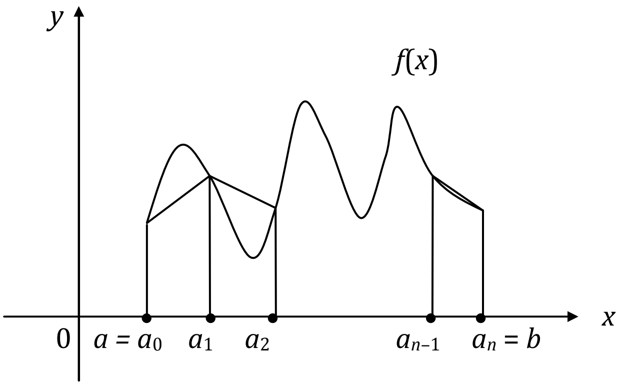
Полная площадь

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Если положить $\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$, формула перепишется в виде

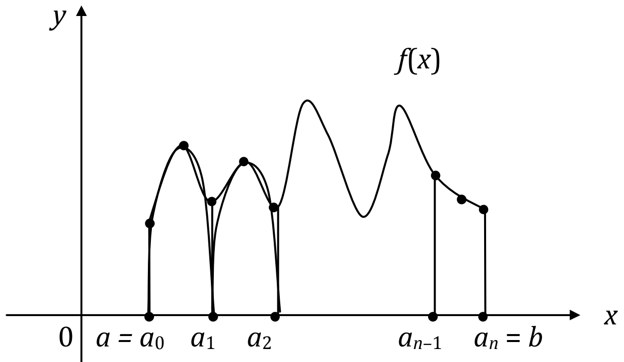
$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right).$$

2) Метод трапеций.



$$S_n=\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a_0)+f(a_1)}{2}+\ldots+\frac{f(a_{n-1})+f(a_n)}{2}\right).$$

3) Формула Симпсона (параболы).
Первые две рассмотренные формулы приближали интеграл ступенчатыми функциями. Значительно большей точности можно добиться, приближая его гладкими функциями, например, параболами (проводя их через три точки: точку начала, середины и конца сегмента):



Для вывода формулы Симпсона нам понадобится *интерполяционная формула Лагранжа*. Пусть известны значения функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, .. x_n, тогда можно построить особые многочлены:

$$Q_{n,k} = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Достаточно очевидно, что
1) $Q_{n,k}(x_k) = 1$.
2) $Q_{n,k}(x_i) = 0 \ (i \neq k)$.

Просуммировав такие многочлены по всем i от 1 до n, получим искомый *интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) Q_{n,k}(x_i).$$

Приведем *важную теорему* об интерполяционном многочлене (без доказательства). Формулировка: пусть $f(x)$ имеет $(n+1)$ непрерывную производную на интервале $[a, b]$. Тогда

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x), \text{где } w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Рассчитаем

$$Q_{2,0}(x) = \frac{(x-b)\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)}{(a-b)\left(a - \dfrac{a+b}{2}\right)} = 2\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} + \frac{x-b}{b-a}$$

$$Q_{2,1}(x) = 4\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} - 4\frac{x-b}{b-a}$$

$$Q_{2,2}(x) = 2\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} - \frac{x-a}{b-a}.$$

В интегральной форме

$$\int_a^b Q_{2,0}(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}, \int_a^b Q_{2,1}(x)\mathrm{d}x = \frac{b(3-a)}{3}.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6N}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)$$

– получили *формулу Симпсона* для приближенного вычисления определенного интеграла.

4) К вопросу о точности формул.
4.1. Точность у метода трапеций и метода прямоугольников примерно одинаковая и зависит от гладкости интегрируемой функции.

$$r_n(f) = \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n \right|.$$

В случае ограниченности первой производной ($|f'| \le M_1$), имеем

$$r_n(f) \le \frac{M_1(b-a)}{4n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right) \text{ (читается: «порядка } \frac{1}{N}\text{»).}$$

Если же и вторая производная ограничена ($|f''| \le M_2$), то достигается предел точности этих формул $\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$, т.к.

$$r_n(f) \le \frac{M_2(b-a)^3}{12N^2}.$$

4.2. Точность формулы Симпсона весьма высока. Если четвертая производная функции ограничена ($\left|f^{(\mathrm{IV})}\right| \le M_4$) на интервале интегрирования, то

$$r_n(f) \le \frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}M_4.$$

Операционное исчисление

Преобразование Лапласа и его свойства

Введем следующее *преобразование Лапласа* $F(p)$ функции $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t,$$

причем $p \in \mathbb{C}, p > p_0$, где p_0 – *показатель сходимости функции* f.

Функцию $f(t)$ называют *оригиналом*, а ее преобразование Лапласа $F(p)$ – *изображением*. Обозначают: $f(t) \risingdotseq F(p)$ («$f(t)$ является образом для $F(p)$».)

Теорема. Если функция $F(p)$ определена для $p > p_0$, то $F(p) \xrightarrow[\operatorname{Re} p\to\infty]{} 0$.

Доказательство: выберем такие числа $s > s_1 > p_0$, что

$$\forall \varepsilon > 0, \eta > 0: \int_0^\eta f(t)e^{-st}\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда рассмотрим

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\eta f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_\eta^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \leq \frac{\eta}{2} + \int_\eta^\infty f(t)e^{-s_1 t}e^{-(s-s_1)t}\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \frac{\eta}{2} + e^{-\eta(s-s_1)}F(s_1) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

Теорема доказана. Что означает этот результат *неформально*? А то, что функция $f(t)$, подвергающаяся преобразованию, относится к экспоненциальному типу. Т.е., ее можно «зажать» (ограничить) экспонентой: $|f(t)| \leq \alpha e^{\beta t}$.

Для оригиналов удобно ввести также два следующих условия:

$$f(t) \equiv 0, t < 0; D\big(f(t)\big) = \mathbb{R}.$$

Свойства

1) Однородность (по свойствам интеграла)

$$\lambda f(t) \risingdotseq \lambda F(p).$$

2) Аддитивность (по свойствам интеграла)

$$f(t) + \varphi(t) \risingdotseq F(p) + \Phi(p).$$

3) Подобие

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Доказательство:

$$\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} \lambda t = \tau \\ t = \dfrac{\tau}{\lambda} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{d}\tau \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p\tau}{\lambda}}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

4) Дифференцирование оригинала

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

Доказательство:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-pt}\mathrm{d}f(t) = e^{-pt}f(t)|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = -f(0) + pF(p).$$

Эту формулу можно обобщить на случай производной n-го порядка:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - f(0)p^{n-1} - f'(0)p^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Докажем ее для случая $n = 2$ (на другие можно перенести по индукции). Пусть $\Phi(p)$ – преобразование Лапласа для функции $f'(t)$:

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = p\Phi(p) - f'(0) = p\big(pF(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

5) Дифференцирование изображения

$$-tf(t) \risingdotseq F'(p).$$

Доказательство:

$$-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{d}{\mathrm{d}p}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{d}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F'(p).$$

Для производных высших порядков

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p).$$

Доказать можно точно так же, как в п.4.

6) Интегрирование оригинала

$$\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство: положим $\varphi(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u \risingdotseq \Phi(p)$. Очевидно, $\varphi(0) = 0$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$f(t) = \varphi'(t) \risingdotseq p\Phi(p) \risingdotseq F(p).$$

Отсюда, $\Phi(p) = F(p)/p$.

7) Интегрирование изображения

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q.$$

Доказательство: положим $f(t)/t \risingdotseq \Phi(p)$ и применим формулу дифференцирования изображения

$$-t\frac{f(t)}{t} \risingdotseq -F(p) = \Phi'(p).$$

Это и означает

$$\Phi(p) = \int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q\,, \Phi(\infty) = 0.$$

8) Запаздывание

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p).$$

Доказательство:

$$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} t-\tau = u \\ t = u+\tau \end{vmatrix} = \int_\tau^\infty f(u)e^{-p(u+\tau)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u)e^{-pu}\mathrm{d}u = e^{-p\tau}F(p).$$

9) Смещение изображения

$$e^{\lambda t}f(t) \risingdotseq F(p-\lambda).$$

Доказательство:

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t}\mathrm{d}t = F(p-\lambda).$$

Изображения некоторых элементарных функций

1) $t^\lambda \risingdotseq \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}$, $\lambda > 1$, где $\Gamma(q) = \int\limits_0^\infty x^{q-1}e^{-x}\mathrm{d}x -$ гамма-функция.

Доказательство:

$$\int\limits_0^\infty t^\lambda e^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} pt = \tau \\ \mathrm{d}t = \dfrac{d\tau}{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{p^{\lambda+1}}\int\limits_0^\infty \tau^\lambda e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}.$$

Отсюда, в частности, следует

$$1 \risingdotseq \frac{\Gamma(1)}{p^1} = \frac{1!}{p} = \frac{1}{p}.$$

2) $t^m e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{m!}{(p-\lambda)^{m+1}}$, $m \in \mathbb{Z}$ (выводится из п.1 и свойства смещения изображения).

3) $e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\lambda}$.

4) $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$.

Доказательство:

$$\cos t = \frac{e^{-it}+e^{it}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+i}+\frac{1}{p-i}\right) = \frac{p}{p^2+1}.$$

5) $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$.

Доказательство:

$$\sin t = i\frac{e^{-it}-e^{it}}{2} \risingdotseq \frac{i}{2}\left(\frac{1}{p+i}-\frac{1}{p-i}\right) = \frac{1}{p^2+1}.$$

6) $\cos \omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

7) $\sin \omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

8) $e^{\lambda t}\sin \omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$.

9) $e^{\lambda t}\cos \omega t \risingdotseq \dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$.

Восстановление оригинала по изображению

Наиболее часто встречающийся случай – изображение является *правильной дробью* вида

$$F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

(собственно, из-за правильности дроби выполняется необходимое нам условие $F(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.)

Разложим дробь на простейшие

$$\frac{A}{(p-\lambda)^m}, \frac{Ap+B}{(p^2+1)^m}.$$

Поскольку $p \in \mathbb{C}$, всегда можно разложить знаменатель дробей второго типа дробей на множители. Тогда для простейших правильных дробей получим

$$\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{(p-i)(p+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right) \text{ и } \frac{1}{(p-\lambda)^m} \risingdotseq \frac{t^{m-1}e^{\lambda t}}{(m-1)!}, m \in \mathbb{Z}.$$

Пример

$$F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3} = \frac{1}{p^3} - \frac{i}{p-(i-1)} + \frac{i}{p-(-i-1)}.$$

$$F(p) \risingdotseq \frac{t^2}{2} - ie^{(i-1)t} + ie^{(-i-1)t} = \frac{t^2}{2} + 2e^{-t}\sin t.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные определения и примеры

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее между собой значение функции и ее производных.

Простейшим дифференциальным уравнением я вляется $f'(t) = g(t)$, где $g(t)$ – известная функция. Решением его, как известно, является неопределенный интеграл – семейство первообразных:

$$f(t) = \int g(t)\mathrm{d}t = G(t) + C = \int_t^{t_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau + C.$$

Общим решением ДУ называется семейство некоторых функций, зависящих от параметров (произвольных констант), *частным решением* – единственная функция, удовлетворяющая начальным условиям задачи.

Примеры

1) Решить уравнение

$$f'(t) = f(t)g(t).$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = g(t)$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \int_t^{t_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau + C$$

$$\ln f(t) = \int_t^{t_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau + C$$

$$f(t) = e^{\int_t^{t_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau + C} = C_1 e^{\int_t^{t_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

где ввели новый параметр $C_1 = e^C$.

2) Физическая задача с начальным условием (охлаждение тела, брошенного в воду).

$$\vartheta_t = \vartheta(t), t = 0 : \ \vartheta_0, a < \vartheta_0.$$

Известно, что скорость охлаждения пропорциональна $(\vartheta(t) - a)$:

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t} = -k(\vartheta(t) - a).$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vartheta(t) - a)}{\mathrm{d}t(\vartheta(t) - a)} = -k$$

$$d(\ln(\vartheta(t) - a)) = -k$$

$$\ln(\vartheta(t) - a) = -kt + C_0$$

$$\vartheta(t) - a = C_1 e^{-kt}$$

$$\vartheta(t) = C_1 e^{-kt} + a.$$

Найдем константу C_1 из начального условия:

$$\vartheta_0 = a + C_1, C_1 = \vartheta_0 - a.$$

Окончательно

$$\vartheta(t) = a + (\vartheta_0 - a)e^{-kt}.$$

Примечание. Так как некоторые интегралы нельзя записать в виде элементарных функций, допускается, чтобы решения содержали неберущиеся интегралы. Решения также могут быть выписаны в виде (практически) неразрешимых аналитически неявных функций.

Неявная запись ДУ

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

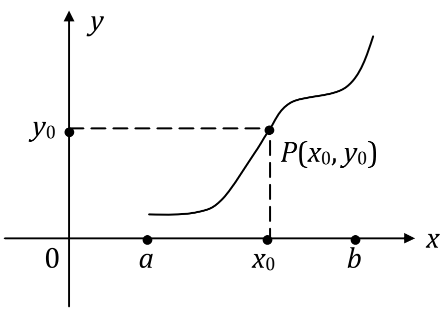
Формально, *решением* такого уравнения называется функция y, имеющая n непрерывных производных на рассматриваемом интервале $[a, b]$, которая при подстановке в ДУ даст тождество.

Частное решение уравнения – одна функция, *общее* – семейство функций. *Интегральной кривой* называют график частного решения ДУ.

Если уравнение разрешено для старшей производной, оно задано *явно*

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Задача Коши



Требуется провести *интегральную кривую* через заданную точку x_0, такую, что

$$f(x_0) = y_0, x_0 \in [a, b].$$

В теории дифференциальных уравнений исключительно важную роль играют *теорема о существовании и единственности*: для любой пары точек (x_0, y_0) существует решение задачи Коши, и притом единственное, если функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет в этой области ограниченную частную производную.

В терминах *интегральной кривой* это означает, что через заданную точку $P(x_0, y_0)$ можно провести интегральную кривую, и притом только одну.

Для высших порядков существует аналог *задачи Коши*: требуется выбрать такую функцию f, что выполняются условия

$$f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_0', \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y_0', .. y_0^{(n-1)}$ – заданные *числа*. (*теорема существования и единственности* в этом случае гласит, что функция должна быть непрерывна и иметь $(n–1)$ непрерывных частных производных).

Пример

Проверить, удовлетворяет ли семейство кривых $y = (x - C)^3$ уравнению

$$y'^3 - 27y^2 = 0.$$
$$y' = 3(x - C)^2, y'^3 = 27(x - C)^6 = 27y^2.$$

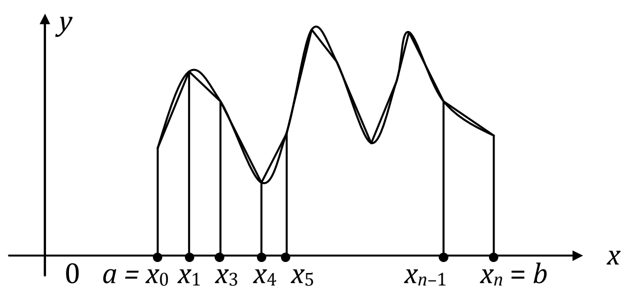
Однако, константа $C = \sqrt[3]{x + y}$ и в точке (0,0) ее производная не существует. Следовательно, есть *лишние* решения (их еще называют *особыми*).

А вот функция вида

$$y(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3, x \le \alpha \\ 0, \qquad \alpha < x < \beta \\ (x-\beta)^3, x \ge \beta \end{cases}$$

будет удовлетворять ДУ из-за достаточной гладкости кубической параболы при любых значениях параметров α и β.

Метод Эйлера решения ДУ



Пусть нам дано ДУ вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

Разобьем интервал $[a, b]$ на отдельные участки (см. рис.) и заменим интегральную кривую на участке ее касательной.

Для участка $[x_0,\ x_1]$ получим из уравнения касательной

$$y(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) = y_1,$$

для участка $[x_1, x_2]$ –

$$y(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

и т.д.

В итоге получим *ломаную Эйлера*, приближающую искомую интегральную кривую.

Линейные ДУ и преобразование Лапласа

Линейным ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_n y^{(n)}(t) + .. + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t).$$

Для решения такого уравнения можно воспользоваться свойствами *преобразования Лапласа*. А именно, обозначим $Y(p) \risingdotseq y(t), F(p) \risingdotseq f(t)$ и вычислим преобразования для правой и левой частей ДУ. По свойству дифференцирования оригинала

$$a_n \left(p^n Y(p) - p^{(n-1)} y_0 - p^{(n-2)} y_0' - .. - p y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)} \right) +$$
$$+ a_{n-1} \left(p^{n-1} Y(p) - p^{(n-2)} y_0 - p^{(n-3)} y_0' - .. - p y_0^{(n-3)} - y_0^{(n-2)} \right) + .. +$$
$$+ a_1 (Y(p) - y_0) + a_0 Y(p) = F(p).$$

Вынося $Y(p)$ и преобразуя к виду многочлена, получим

$$Y(p) Q(p) = F(p) + R(p)$$
$$Y(p) = \frac{F(p) + R(p)}{Q(p)}.$$

Если в результате получилась рациональная дробь или многочлен, то решением уравнения будет оригинал правой части.

Преимущество такого метода заключается в том, что мы сразу находим частное решение для нужных нам начальных условий задачи.

Примеры

1) $\ddot{y} + 4y = 2, y(0) = y'(0) = 0.$

$$Y(p) \risingdotseq y(t)$$
$$p^2 Y(p) + 4Y(p) = \frac{2}{p}$$
$$Y(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + 4}\right).$$
$$y(t) = \frac{1}{2} H(t) - \frac{1}{2} \cos 2t,$$

где $H(t)$ – *функция Хевисайда*:

$$H(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}.$$

Иногда $H(t)$ обозначают как $\mathbb{1}(t)$, $\mu(t)$.

2) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = \sin x\,, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

$$\left(p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0)\right) + 2\left(pY(p) - y(0)\right) + 5Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$
$$Y(p)(p^2 + 2p + 5) = \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1}$$
$$Y(p) = \frac{p}{10(p^2 + 1)} + \frac{1}{5(p^2 + 1)} + \frac{p + 1}{10((p^2 + 1)^2 + 1)} + \frac{9}{10((p^2 + 1)^2 + 4)}.$$
$$y(t) = -\frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} e^{-t} \cos 2t + \frac{9}{20} e^{-t} \sin 2t.$$

3) $\begin{cases}\dot{y}+4y+4z=0\\ \dot{z}+2y+6z=0\end{cases}, y(0)=0, z(0)=15.$

$$\begin{cases} pY(p)+4Y(p)+4Z(p)=0\\ pZ(p)-15+2Y(p)+6Z(p)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (p+4)Y(p)+4Z(p)=0\\ 2Y(p)+(p+6)Z(p)=15\end{cases}$$

$$8Z(p)-(p+6)(p+4)Z(p)=-15(p+4)$$

$$Z(p)=\frac{15(p+4)}{p^2+10p+16}=\frac{5}{p+2}+\frac{10}{p+8}.$$

$$z(t)=5e^{-2t}+10e^{-8t}, y(t)=-8e^{-2t}+11e^{-8t}.$$

Классификация ДУ первого порядка

Уравнение вида

$$F(x,y,y')=0,$$

где F непрерывна как функция трех переменных, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Такое уравнение *разрешено относительно производной*, если оно записано в форме

$$y'=f(x,y),$$

где f непрерывна и имеет непрерывные частные производные по x и y.

Частное решение уравнения – функция $y(x)$ такая, что

$$y(x_0)=y_0.$$

Иногда удобно (при решении) записывать ДУ *в симметричном виде*:

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

ДУ первого порядка разделяют на следующие виды:

1) *Уравнения с разделяющимися переменными*

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)\mathrm{d}x+\varphi_2(x)\psi_2(y)\mathrm{d}y=0.$$

Делением на $\big(\psi_1(y)\varphi_2(x)\big)$ переводится в *уравнение с разделенными переменными*:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x+\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\mathrm{d}y=0.$$

Далее производится интегрирование и находится *частный интеграл* ДУ:

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\mathrm{d}y=0.$$

Примеры

1.1. $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} y=\arcsin x+C$$

$$y=\operatorname{tg}(\arcsin x+C).$$

1.2. $y'=\sqrt[3]{(4x-y+1)^2}$.

$$z=4x-y+1, y=4x-z+1, y'=4-z'$$

$$y'=\sqrt[3]{z^2}=4-z'$$

$$z'=4-z^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{4-z^{\frac{2}{3}}}=\mathrm{d}x$$

$$x=\int\frac{\mathrm{d}z}{4-z^{\frac{2}{3}}}=\begin{vmatrix} z=t^3\\ \mathrm{d}z=3t^2\mathrm{d}t\end{vmatrix}=\int\frac{3t^2\mathrm{d}t}{4-t^2}=3\int\frac{t^2-4+4}{4-t^2}\mathrm{d}t=-3t+4\ln\frac{2+t}{2-t}+C=$$

$$= -3z^{\frac{1}{3}} + 3\ln\frac{2+z^{\frac{1}{3}}}{2-z^{\frac{1}{3}}} + C = -3\sqrt[3]{4x-y+1} + 3\ln\frac{2+\sqrt[3]{4x-y+1}}{2-\sqrt[3]{4x-y+1}} + C.$$

2) *Однородные* уравнения

Решение имеет вид

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

а исходное уравнение

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

где P, Q – однородные функции одного и того же порядка k:

$$P(tx,ty) = t^k P(x,y), Q(tx,ty) = t^k Q(x,y), t \neq 0.$$

Метод решения – замена переменных:

$$\frac{y}{x} = u, y = ux, \mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x.$$

$$x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x = f(u)\mathrm{d}x$$

$$x\mathrm{d}u = (f(u) - u)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|x| = \int \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}$$

$$|x| = e^{\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}}.$$

Примеры

2.1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, u = \frac{y}{x}$.

$$x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x = \left(u + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}x$$

$$x\mathrm{d}u = \frac{1}{u}\mathrm{d}x$$

$$u\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

$$|x| = e^{\frac{u^2}{2}+C} = e^{\frac{y^2}{2x}+C}$$

$$y = x\sqrt{2}\sqrt{\ln|x| + C}.$$

2.2. $xy' = y\ln\frac{y}{x}, y(1) = 1$.

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}, \frac{y}{x} = u$$

$$x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x = (u\ln u)\mathrm{d}x$$

$$x\mathrm{d}u = (u\ln u - u)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|x| = \ln|\ln u - 1| + C$$

$$u = e^{1+Cx}$$

$$\frac{y}{x} = e^{1+Cx}$$

$$y = xe^{1+Cx}.$$

Найдем константу C из начального условия.

$$y(1) = e^{1+C} = 1, C = -1.$$

Отсюда получаем

$$y = xe^{1-x}.$$

3) *Линейное ДУ первого порядка*.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x), x \in [a,b].$$

Если $f(x) = 0$, уравнение называют *линейным однородным*. Из общей теории следует, что в случае когда $p(x)$ и $f(x)$ –непрерывные и дифференцируемые функции, задача Коши имеет единственное решение, и, значит, существует общее решение – функция $\Phi(x,\ y, C)$ – непрерывная как функция трех аргументов.

Решение ДУ первого порядка состоит из двух этапов.
а) Решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\mathrm{d}x$$

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = e^{-P(x)+C} = C_1 e^{-P(x)},$$

где ввели обозначения: $P(x)$ – некоторая первообразная $p(x)$, $C_1 = e^C$ – новая постоянная.

б) Считая постоянную C_1 функцией аргумента x, выпишем значение y и подставим его в исходное уравнение:

$$y(x) = C_1 e^{-P(x)} = y_0 C_1(x), y_0 = e^{-P(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x)$$

$$y_0(x)C_1'(x) + C_1(x)y_0'(x) + p(x)C_1(x)y_0(x) = f(x)$$

$$y_0(x)C_1'(x) + C_1 x_0\big(y_0'(x) + p(x)y_0(x)\big) = f(x)$$

Второе слагаемое в левой части равно нулю как решение однородного уравнения, тогда

$$y_0(x)C_1'(x) = f(x)$$

$$C_1'(x) = \frac{f(x)}{y_0(x)}$$

$$C_1(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)}\mathrm{d}x$$

$$y(x) = C_1 e^{-P(x)} = e^{-P(x)}\int \frac{f(x)}{y_0(x)}\mathrm{d}x.$$

Пример

$$y' - y = \sin x.$$

а) $y' - y = 0.$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$|y| = e^{x+C}$$

$$y = C_1 e^x.$$

б) $y(x) = C_1(x)e^x.$

$$C_1'(x)e^x - C_1(x)(e^x)' - C_1(x)e^x = \sin x$$

$$C_1(x) = \int e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\int \sin x\,\mathrm{d}(e^x) = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x -$$

$$-\int e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x).$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + Ce^{-x}.$$

4) Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = y^\alpha f(x).$$

Это уравнение сводится к линейному с помощью подстановки

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Действительно,

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \mathrm{d}y = \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \mathrm{d}z + p(x) z^{\frac{1}{1-\alpha}} \mathrm{d}x = z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} f(x) \mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \mathrm{d}z = \left(z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} f(x) - p(x) z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{1-\alpha} = \big(f(x) - zp(x)\big) \mathrm{d}x$$
Последнее уравнение уже является линейным и легко решается.

Пример

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}.$$
Выполняем подстановку:
$$\alpha = -1, z = y^2, y = \sqrt{z}, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \left(\frac{\sqrt{z}}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{z}}\right) \mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = \left(\frac{\sqrt{z}}{x} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right) \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}z = \left(\frac{z}{x} - 1\right) \mathrm{d}x$$
Получили линейное уравнение
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{z}{x} - 1\right).$$
Решаем:

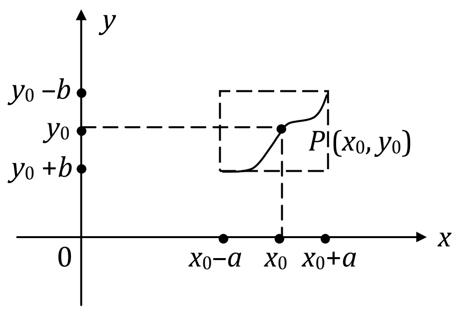
а) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z}{x}$.
$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\ln|z| = \ln|x| + C$$
$$z = Cx.$$
б) $z = C(x)x$.
$$C'(x)x + C(x)x' = C(x) - 1$$
$$C'(x) = -\frac{1}{x}$$
$$C(x) = -\ln|x| + C_1$$
$$z = x(-\ln|x| + C_1)$$
$$z = x \ln\frac{C_1}{x}.$$
Совершаем обратную подстановку:
$$y = \pm\sqrt{x \ln\frac{C_1}{x}}.$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ первого порядка

Формулировка: пусть функция $f(x, y)$ в дифференциальном уравнении первого порядка
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$
непрерывна в некоторой области $[x_0-a, x_0+a]$, $[y_0-b, y_0+b]$, содержащей точку $P(x_0, y_0)$, и, кроме того, частная производная f по y ограничена:
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N.$$
Тогда существует такое число $\delta > 0$, что на интервале $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ есть единственная функция $y(x)$, имеющая непрерывную производную и являющаяся частным решением ДУ, т.е.

$$y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Графически это можно изобразить так:



Об уравнениях высшего порядка

Для уравнений высшего порядка справедлива похожая *теорема о существовании и единственности* и есть аналог *задачи Коши* – см. стр. 23 (Задача Коши).

Для решения уравнений высшего порядка можно произвести *понижение порядка* уравнения. Есть 2 случая:

1) $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ – функция только x и производных ⍰

Введем замену $z = y'$. Получим уравнение

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Решив его, сделаем обратную замену.

2) $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ – функция не содержит x.

Применим замену $z = y'$, новое уравнение будет выглядеть как

$$F(z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Пример

$$y'^2 + 2yy'' = 0.$$
$$y' = z, y'' = z'_y y'_x = z'_y z$$
$$z^2 + 2yz'_y z = 0$$
$$z(z + 2yz'_y) = 0$$

а) $z = 0$.

$$y' = 0$$
$$y = C.$$

б) $z + 2yz'_y = 0$.

$$\frac{z'_y}{z} = -\frac{1}{2y}$$
$$\ln|z| = \ln\frac{1}{\sqrt{y}} + C$$
$$z = \frac{C}{\sqrt{y}}$$
$$y'_x = \frac{C}{\sqrt{y}} \equiv y'_x\sqrt{y} = C$$
$$y = (Cx + C_1)^{\frac{3}{2}}.$$

Особые решения ДУ первого порядка

Решая дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

мы считаем, что в некоторой области f непрерывна и ее частная производная также непрерывна. Тогда задача Коши имеет единственное решение. Из этого следует, что все решения можно записать как уравнение связи x, y и постоянной C:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

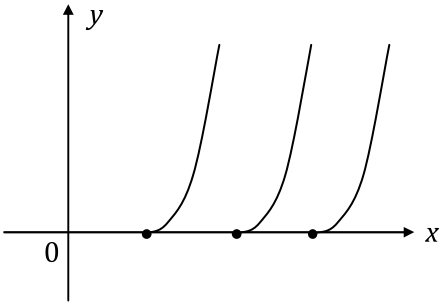
Зависимость, выражаемая этим уравнением, непрерывная.

Если же условие существования и/или единственности в некоторой точке не выполняется, у уравнения появляются *особые решения*.

Пример

$$y' = y^{\alpha}.$$

Заметим, что $f(x, y) = y^{\alpha}$ и если $\alpha \in (0,1)$, то в точке $y = 0$ значение частной производной $\partial f/\partial y = \alpha y^{-1+\alpha}$ не определено. Поэтому появятся *особенности* на вещественной числовой прямой. Достаточно очевидно, что $y \equiv 0$ – *особое решение*.



Интегрируя, находим общее решение

$$y = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}(x - x_0)\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}, x > x_0.$$

На плоскости функция y (см. рис.) задает семейство парабол. Особое решение $y = 0$ – огибающая семейства решений.

Числовые ряды

Общие понятия и определения

Запись вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ или } u_0 + u_1 + u_2 + .. + u_k + ..$$

называется *числовым рядом* с *общим членом* u_k.

Действия над рядами

1) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k)$.

2) $\alpha \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha u_k$.

3) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} w_k = u_k v_0 + u_{k-1} v_1 + .. + u_0 v_k$.

Частичной суммой ряда называется сумма его *n* первых членов

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Если существует предел частичной суммы ряда $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд *сходится*, и число S называют *суммой ряда*. Если предел не существует, ряд *расходится*.
Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ сходится, то говорят, что исходный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *сходится абсолютно*.
Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится, но не сходится абсолютно, говорят, что он *сходится условно*.

Сравнение рядов

1) С бесконечно убывающей геометрической прогрессией (*показательный* ряд)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, |\alpha| < 1.$$

2) *Гармонический* ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 1.$$

Для рядов из пп. 1 и 2, вообще говоря, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Условия сходимости ряда

Теорема Коши о сходимости ряда (формальный критерий *для теории*)
Формулировка: ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0, n \geq m \geq N: \left| \sum_{k=m}^{n} u_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство: если ряд сходится, частичная сумма ряда $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ сходится к конечному числу. По условию Коши для сходимости последовательности имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0, n, m > N: |S_n - S_m| < \varepsilon$$

Это совершенно то же самое, что и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0, n \geq m \geq N: \left| \sum_{k=m}^{n} u_k \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если ряд сходится, то его общий член сходится к 0. (обратное неверно). Действительно, возьмем $n = m + 1$. Тогда в условии сходимости по Коши останется

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N > 0, n \geq N: |u_n| < \varepsilon.$$

Но это означает, что u_n – бесконечно малая последовательность. Доказали.

Теорема (интегральный признак сходимости рядов)

Формулировка: пусть

$$u_k = f(x), f(x) \geq 0, f(x) \downarrow 0.$$

Ряд $\sum_{x=0}^{\infty} u_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий ему несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство:

1) Пусть $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится. Это означает, что

$$\sum_{x=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$$

имеет конечный предел. Таким образом, сходится ряд $\sum_{x=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$. С другой стороны, в силу свойств функции $f(x)$

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \geq f(k+1) = u_{k+1}.$$

Из критерия Коши имеем

$$0 \leq \left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon\ (n, m \geq N).$$

2) Если $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ расходится, то это означает

$$B < \int_1^{A} f(x)\mathrm{d}x \to \infty.$$

Возьмем $n \leq A < n + 1$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x > B.$$

С другой стороны,

$$A \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq f(k) = u_k.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k > B$$

и ряд расходится.

Примечание. Вопросы сходимости не зависят от номера первого члена суммы.

Вычисление сумм рядов

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, |\alpha| < 1.$

Дифференцируем (не всегда так можно сделать, но в данном случае можно)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Дифференцировать «многочлен», стоящий под знаком суммы ряда, можно и дальше.

Конкретный пример

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k-1}}=4,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=2.$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\alpha}x^{k-1}\mathrm{d}x.$

Поменяем местами знаки суммы и интеграла (это тоже не всегда можно делать)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\alpha}x^{k-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha}\left(\sum_{k'=0}^{\infty}x^{k'}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-\alpha).$$

Отсюда можно *вычислить*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{k}=\frac{-\ln(1-\alpha)}{\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k^2}=-\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=-\int_0^{1}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}.$$

Условия сходимости рядов для положительных общих членов

Будем рассматривать ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k\,,u_k\geq 0.$$

Теорема о сравнении

Формулировка: Пусть имеются 2 ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k\,,\sum_{k=0}^{\infty}v_k\geq 0,u_k\leq v_k,k>k_0.$$

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ сходится, то и ряд $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ сходится. Если $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ расходится, то и $\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ расходится.

Доказательство:

1) Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ сходится. Это означает, что

$$\exists m,n\geq N{:}\ \sum_{k=m+1}^{n}v_k<\varepsilon.$$

Поскольку $u_k\leq v_k$, то

$$\sum_{k=m+1}^{n}u_k<\varepsilon$$

и ряд $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ сходится.

2) Пусть теперь ряд $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ расходится. Тогда

$$\forall m,n\geq N{:}\ \sum_{k=m+1}^{n}u_k\geq\varepsilon$$

Поскольку $u_k\leq v_k$, то

$$\sum_{k=m+1}^{n}v_k\geq\varepsilon$$

и ряд $\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ расходится.

Признак эквивалентности
Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=A>0,$$

то ряды $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходятся или расходятся одновременно.
Объяснение: при $k > k_0$ выполняется

$$u_k \le 2Av_k, v_k \le \frac{1}{2A}u_k.$$

Признак Даламбера
Формулировка:
1) Пусть при достаточно большом $k > k_0$ выполняется условие

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}<q<1,$$

тогда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится.
2) Если при $k > k_0$ выполняется условие

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\ge 1,$$

то $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ расходится.
3) Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=q,$$

то при $q < 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится, при $q > 1$ – сходится, при $q = 1$ – может и сходиться, и расходиться.

Доказательство:
1) Возьмем некоторое u_n, где n – достаточно большой номер. Можно записать

$$u_n=\frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}..\frac{u_{k_0+1}}{u_{k_0}}\frac{u_{k_0}}{u_{k_0-1}}..\frac{u_1}{u_0}u_0$$

Каждое из этих отношений не превосходит q, тогда

$$u_n \le Cq^{n-k_0}$$

Если $q < 1$, справа имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, и ряд сходится.
2) $u_k > u_{k_0}\ (\forall k > k_0) \Rightarrow u_k \nrightarrow 0.$
3) Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=q<1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists k>k_0\colon \frac{u_{k+1}}{u_k}<q+\varepsilon<1 \Rightarrow \text{по п.1 ряд сходится.}$$

Теперь возьмем

$$q>1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists k>k_0\colon \frac{u_{k+1}}{u_k}>q+\varepsilon>1 \Rightarrow \text{по п.2 ряд расходится.}$$

Признак Коши
Формулировка:
1) Пусть при достаточно большом $k > k_0$ выполняется условие

$$\sqrt[k]{u_k}<q<1,$$

тогда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится.
2) Если при $k > k_0$

$$\sqrt[k]{u_k}\ge 1,$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ расходится.
3) Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=q,$$

то при $q < 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится, при $q > 1$ – сходится, при $q = 1$ – может и сходиться, и расходиться.

Доказательство:
1) $u_k < q^k < 1 \ (k > k_0) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится.
2) $\sqrt[k]{u_k} \geq 1, u_k \geq 1 \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ расходится.
3) Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q, q < 1$$

Тогда

$$\sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon < 1$$

$$u_k < (q+\varepsilon)^k < 1 \Rightarrow \text{по п.1 сходится.}$$

Если же $q > 1$, имеем

$$\sqrt[k]{u_k} > q + \varepsilon > 1$$

$$u_k > 1 \Rightarrow \text{по п.2 расходится.}$$

Примеры

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}, \alpha > 1$ – сходится.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ – расходится т.к. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ – сходится т.к. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Перестановка слагаемых в рядах

Утверждение

Формулировка: Для положительных рядов ($u_n > 0$) при перестановке слагаемых факт сходимости и сумма ряда сохраняется.
Доказательство: Пусть имеется некоторый исходный ряд

$$u_0 + u_1 + .. + u_n + .. \text{ с суммой } S_n,$$

и другой ряд, полученный перестановкой слагаемых в u_n

$$u_0' + u_1' + .. + u_n' + .. = u_{k_0} + u_{k_1} + .. + u_{k_n} + .. \text{ с суммой } S_n'.$$

Возьмем такое значение

$$N = \max_{i \leq n} u_{k_i}.$$

Предположим, что первый ряд сходится к S:

$$\sum_n u_n = S,$$

а $S_n \uparrow, S_n' \uparrow$. С одной стороны, $S_n \leq S$, а с другой, $S_n' \leq S_N$. Значит,

$$S_n' \leq S, \lim_{n\to\infty} S_n' = S' \leq S.$$

Т.к. при другом порядке суммирования $S \leq S_N' \leq S', S \leq S'$. Отсюда, $S = S'$.

Теорема

Формулировка: если ряд сходится абсолютно, то его члены можно переставлять. Факт сходимости и сумма ряда при этом не изменятся.
Доказательство: пусть имеются 2 ряда: $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$, полученный из первого перестановкой членов. Введем положительные функции

$$u_k^+ = \begin{cases} u_k, \ u_k \geq 0 \\ 0, \ u_k < 0 \end{cases}, u_k^- = \begin{cases} -u_k, \ u_k \leq 0 \\ 0, u_k > 0 \end{cases}.$$

Легко видеть, что

$$u_k = u_k^+ - u_k^-, |u_k| = u_k^+ + u_k^-$$

Предположим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится. Тогда можно записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-.$$

Ясно, что если ряд сходится абсолютно, то сходятся $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^+, \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-, u_k^+ \le |u_k|, u_k^- \le |u_k|$.
Значит,
$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} v_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k^+ - v_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$
Теорема доказана.

Примечание. Теорема не верна для условно сходящихся рядов – в них переставлять слагаемые *нельзя*!

Признаки сходимости (условной) знакопеременных рядов

Рядом Лейбница называется ряд вида
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + .., \text{ причем } a_n > 0, a_n \downarrow 0.$$
Утверждение. Ряд Лейбница всегда сходится.
Доказательство: частичная сумма ряда
$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 + .. + (-1)^n a_n = S_{2n+1} - S_{2n}$$
Нечетная сумма ограничена сверху:
$$S_{2n+1} = a_0 - a_1 + .. + a_{2n} - a_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - ..(a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1} \le a_0$$
С другой стороны, нечетная сумма монотонна:
$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + .. + (a_{2n} - a_{2n+1}).$$
Значит, существует предел
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S.$$
Для четной суммы
$$S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1}, a_{2n+1} \to 0\ (n \to \infty)$$
$$|S_{2n+1} - S_{2n}| \le a_{2n+1} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$
Утверждение доказано.

Примеры на сходимость рядов

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + .. -$сходится как ряд Лейбница, сумма равна $\ln 2$ (по формуле Тейлора).

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, u_n \sim \frac{1}{n^3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$.

По признаку Коши
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \text{ сходится.}$$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot .. \cdot (2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

По признаку Даламбера
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot .. \cdot (2n+1) \cdot 2^n (n-1)!}{2^{2n+2} n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot .. \cdot (2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2} < 1 - \text{ сходится.}$$

5) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

$$u_n = \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = e^{-(\ln\ln\ln n)\ln n} = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln m}} \sim \frac{1}{n^2} - \text{ сходится.}$$

Признак Абеля-Дирихле

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится, если } \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le C\ \forall n, b_n \downarrow 0.$$

Доказательство: применим признак Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M, N > N_0: \left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=M}^{N}\left(a_n \sum_{i=M}^{n}(b_i - b_{i-1}) + b_{M-1}\right)\right| = \left|\sum_{n=M}^{N}\left(a_n \sum_{i=M}^{n}(b_i - b_{i-1})\right)\right| + b_{M-1}\left|\sum_{n=M}^{N} a_n\right|$$

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n\right| \le \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{M} a_n\right| \le 2C$$

$$b_{M-1}\left|\sum_{n=M}^{N} a_n\right| \le b_{M-1} 2C < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\left(a_n \sum_{i=M}^{n}(b_i - b_{i-1})\right)\right| = \left|\sum_{i=M}^{N}(b_i - b_{i-1}) \sum_{n=i}^{N} a_n\right| \le \left|\sum_{i=M}^{N}(b_{i-1} - b_i) \sum_{n=i}^{N} a_n\right| \le$$

$$\le \sum_{i=M}^{N}(b_{i-1} - b_i)\left|\sum_{n=M}^{N} a_n\right| \le 2C \sum_{i=M}^{N}(b_{i-1} - b_i) \le 2C(-b_N + b_{M-1}) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда,

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| < \varepsilon.$$

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{25}}{n}.$$

Сумма одной последовательности в совокупности ограничена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{25} \le C$$

Сумма другой последовательности монотонно убывает к 0:

$$\frac{1}{n} \downarrow 0\ (n \to \infty)$$

Следовательно, ряд сходится.

Функциональные последовательности и ряды

Основные понятия и определения

Пусть имеется *последовательность функций* $f_n(z)$. Говорят, что $f_n(z)$ *равномерно сходится* к $f(z)$ на множестве E: $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, если

$$\sup_{z\in E}|f_n(z) - f(z)| \to 0 \ (n \to \infty),$$

и *сходится поточечно*: $f_n(z) \to f(z)$, если

$$\forall z \in E : f_n(z) \to f(z) \ (n \to \infty).$$

Пример

Пусть E – отрезок $(0,1)$ вещественной прямой, а последовательность

$$f_n(z) = \frac{1}{nz}.$$

Ясно, что имеет место *поточечная сходимость*:

$$\forall z \in E : f_n(z) \to 0.$$

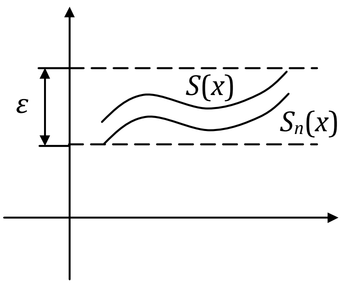
Однако *равномерной сходимости* нет:

$$\sup_{z\in E}\left|0 - \frac{1}{nz}\right| = \infty.$$

Пусть теперь имеется *ряд функций*, или *функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Говорят, что $u_n(x)$ *равномерно сходится*: $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, когда частичная сумма ряда $S_n(x)$ равномерно приближается к некоторой функции $S(x)$ (см. рис.)



Теорема Вейерштрасса о мажорируемой сходимости

Теорема.

Формулировка: Если общий член ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ ограничен некоторой *мажорантой*:

$$|u_n(x)| \le \alpha_n,$$

и она сходится:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty,$$

то ряд сходится равномерно и абсолютно.

Вспомогательное утверждение. Признак Коши для функциональных рядов:

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 > 0 \ M, N > N_0 : \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=M}^{N} u_n(x)\right| < \varepsilon.$$

(Доказательство этого признака совершенно аналогично доказательству для числовых рядов, поэтому мы его здесь приводить не будем).

Доказательство: применим признак Коши к мажоранте:

$$\sum_{n=M}^{N} \alpha_n \le \varepsilon$$

$$\left|\sum_{n=M}^{N} u_n(x)\right| \le \sum_{n=M}^{N} |u_n(x)| \le \sum_{n=M}^{N} \alpha_n \le \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема Вейерштрасса о непрерывности предельной функции

Теорема.
Формулировка: пусть имеется последовательность функций $f_n(x)$, причем на интервале $[a, b]$ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Если $f_n(x)$ непрерывна, утверждается, что $f(x)$ также непрерывна. («равномерный предел непрерывных функций непрерывен»).

Доказательство: Каждая функция $f_n(x)$ непрерывна, следовательно, она равномерно непрерывна при каждом n на интервале $[a, b]$. Тогда выберем такое значение n_0, $n > n_0$, что

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

После этого выберем при фиксированном ε такое δ, что

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x') + f_n(x') - f(x')| \le$$
$$\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \le 3\varepsilon.$$

Получили: $f(x)$ непрерывна и равномерно непрерывна.

Эта теорема автоматически переносится на функциональные ряды: если $u_n(x)$ непрерывны и ряд равномерно сходится, то предельная функция $u(x)$ также сходится.

Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов

Теорема (о почленном интегрировании).
Формулировка: Если ряд равномерно сходится, его можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

Доказательство: введем

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, , f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)\, , f_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

Возможность интегрирования вытекает из непрерывности предельной функции (т. Вейерштрасса). Следовательно, осталось доказать

$$\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \to \int_a^b f(x) \mathrm{d}x,$$

или, что то же самое,

$$\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\, \mathrm{d}x \to 0.$$

$$\left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\, \mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \le \int_a^b \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \le$$
$$\le (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ в силу равномерной сходимости.}$$

Теорема (о почленном дифференцировании).
Формулировка: рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \text{ и предположим}$$

1) $\exists x_0 \in [a,b]\colon \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) \to u(x_0)$,

2) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ интегрируема, а ряд, соответственно, почленно дифференцируем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows u(x), u'(x) = \varphi(x), \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = u'(x).$$

Доказательство: по предположению 2, *результат формального дифференцирования* равномерно сходится к $\varphi(x)$. Отсюда, по теореме о почленном интегрировании, можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_0'} u_n'(x)\mathrm{d}x \rightrightarrows \int_{x_0}^{x_0'} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(u_n(x_0') - u_n(x_0)\big) \rightrightarrows_{x_0'} \int_{x_0}^{x_0'} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

Поскольку ряд в x_0 будет сходиться, из этого следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0') \rightrightarrows u(x_0) + \int_{x_0}^{x_0'} \varphi(x)\mathrm{d}x = F(x_0')$$

$$\frac{\mathrm{d}F(x_0')}{\mathrm{d}x_0'} = u(x_0')$$

Теорема доказана.

Пример

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \rightrightarrows f(x), \alpha > 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n\sin nx}{n^\alpha} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha-1}} \rightrightarrows f'(x).\ \ \alpha - 1 > 1, \alpha > 2.$$

Степенные ряды

Рядом Маклорена называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z), z \in \mathbb{C}.$$

Сходимость такого ряда определяется по *признаку Коши*: если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z^n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}|z|,$$

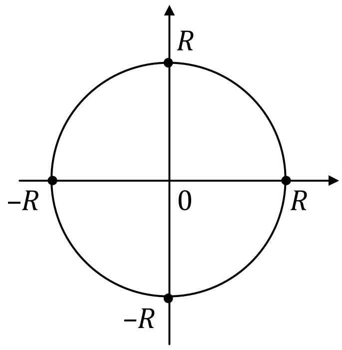
можно ввести параметр

$$q = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Когда ряд сходится,

$$q|z| < 1, |z| < \frac{1}{q} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Неравенство
$$|z| < \frac{1}{q}$$
определяет в комплексной плоскости круг радиусом
$$R = \frac{1}{q}.$$
При этом R называют *радиусом сходимости*, а круг такого радиуса – *кругом сходимости*.



Внутри круга сходимость есть, вне – нет, на поверхности – может как быть, так и не быть.

Воспользовавшись *признаком Даламбера*, q и R можно определить как
$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$
Пример
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n}}.$$
Определим радиус сходимости
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$
Множество сходимости $|z| \le 1$.
z = 1 – расходится
z = –1 – сходится (как ряд Лейбница).
$|z| < 1$ – сходится.

Внимание! Внутри круга сходимости ряд сходится неравномерно. Но в области $|z| < R - \varepsilon$ (ε мало) будет наблюдаться равномерная сходимость. А раз так, то ряды Маклорена можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри круга сходимости сколько угодно раз.

Дифференцируем (z = 0)
$$a_0 = f(0)$$
$$na_1 = f'(0), a_1 = \frac{f'(0)}{n}$$
$$\dots$$
$$f^{(n)}(0) = n!\,a_n, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$
Т.е., ряд Маклорена – частный случай *ряда Тейлора* (последний сводится к ряду Маклорена заменой $t = z - z_0$).

Теорема Абеля (о сходимости)
Формулировка: пусть имеется степенной ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n = f(z),$$
сходящийся в z_0. Пусть задано некоторое число $q \le |z_0|$. Тогда ряд сходится равномерно в области $|z| \le q$.

Доказательство: если в z_0 есть сходимость, то имеет место неравенство
$$q < |z_0| \le R.$$
Раз $q < R$, то в этой области наблюдается равномерная сходимость. Радиус равномерной сходимости

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $|z| \le q$, это означает

$$|a_n z^n| < |a_n| q^n$$
$$\sqrt[n]{a_n z^n} \le |a_n|^{\frac{1}{n}} q$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |z| \le q.$$

Примеры

1) $1 + z + z^2 + z^3 + .. = \frac{1}{1-z}$ (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия)

Круг сходимости $|z| < R = 1$.

Продифференцируем:

$$1 + 2z + 3z^2 + .. + nz^{n-1} + .. = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Еще раз продифференцируем:

$$2 + 6z + 12z^2 + .. + n(n-1)z^{n-2} + .. = ..$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^z (1 + z + z^2 + ..)\,\mathrm{d}z = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + .. + \frac{z^{n+1}}{n+1} + .. = \int_0^z \frac{1}{1-z} = -\ln|z-1|$$

И еще раз:

$$\int_0^z \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + .. + \frac{z^{n+1}}{n+1} + ..\right) \mathrm{d}z = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{12} + .. + \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + .. = \int_0^z \ln(1-z)\,\mathrm{d}z.$$

2) $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + .. + \frac{z^n}{n!} + .. = e^z.$

$$a_n = \frac{1}{n!}, q = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0, R = \frac{1}{q} = \infty \Rightarrow \text{ ряд сходится везде.}$$

3) $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - .. + \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n!} + .. = \ln(1+z).$

$$a_n = \frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = 1, R = 1, |z| < 1.$$

4) Ряд для ARCTG x.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x^2:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + .. = \frac{1}{1+x^2}.$$

Это же производная арктангенса! Проинтегрируем:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + ..)\mathrm{d}x$$

Получили:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + .. = \mathrm{ARCTG}\, x.$$

Радиус сходимости здесь такой же, как и у геометрической прогрессии (1) – ведь он не меняется при интегрировании и дифференцировании.

«Конкретный пример»

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = -\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+2}\right) =$$
$$= -\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n'=1}^{N+1} \frac{1}{n'+2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+2}\right) = -= -\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N+3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Основные понятия и определения

Будем работать с n-мерным *арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$ – множеством векторов $\vec{x} = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. Длины векторов определим согласно *Евклидовой метрике*

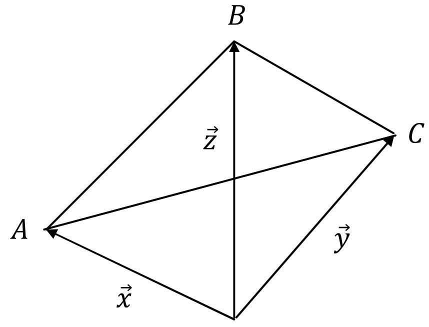
$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Расстояние между двумя точками $\rho(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}$.

Неравенство треугольника
В $\mathbb{R}^n$ справедливо следующее неравенство

$$|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x} - \vec{z}| + |\vec{y} - \vec{z}|.$$

При n = 2, его можно проиллюстрировать следующим образом (*длина стороны треугольника не превышает суммы двух других сторон*):

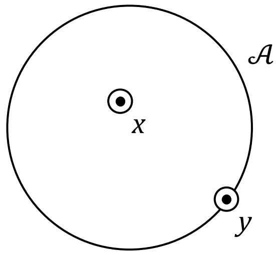


$$|AC| \leq |AB| + |BC|$$

Множества точек
Будем работать с подмножествами $\mathbb{R}^n$. Базовыми среди них являются следующие:

$$|\vec{x} - \vec{a}| < r \text{ (открытый шар)},$$
$$|\vec{x} - \vec{a}| \leq r \text{ (замкнутый шар)},$$
$$\vec{b} < \vec{x} < \vec{a} \text{ (открытый прямоугольник)},$$
$$\vec{b} \leq \vec{x} \leq \vec{a} \text{ (замкнутый прямоугольник)}.$$

Пусть мы имеем $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество. Точка x называется *внутренней точкой* $\mathcal{A}$, если она входит в $\mathcal{A}$ вместе с некоторым шаром. Совокупность внутренних точек называют *внутренностью множества* $\mathcal{A}$ и обозначают $\mathcal{A}^o$.



Точка y называется *граничной точкой* $\mathcal{A}$, если любой шар с центром в ней содержит как точки, принадлежащие $\mathcal{A}$, так и не принадлежащие. Совокупность граничных точек называют *границей множества* $\mathcal{A}$.

Множество $\mathcal{A}$ – *замкнутое*, если оно содержит свою границу, и *открытое*, если не содержит. Очевидно, что дополнение замкнутого множества есть открытое, и наоборот.

Окрестностью U_x точки x называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Сходимость

Если задана последовательность точек $(x_{11}, x_{21}, .., x_{n1}), (x_{12}, x_{22}, .., x_{n2}), \ldots$, будем говорить, что *переменная точка* $(x_{1k}, x_{2k}, .., x_{nk}) = \vec{x}_k$ *пробегает значения этой последовательности.*

Переменная точка $\vec{x}_k$ *сходится покоординатно* к точке $\vec{x}_0$, если все координаты x_{jk} сходятся к координатам x_j $(j = 1..n)$, т.е. $x_{1k} \to x_1, x_{2k} \to x_2, .., x_{nk} \to x_n$.

Это свойство можно выразить еще двумя способами:
1) $|\vec{x}_k - \vec{x}_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,
2) $\forall U_{x_0}(\varepsilon)\ \exists k > k_0 : x_k \in U_{x_0}(\varepsilon)$.
Здесь U_{x_0} – любые открытые шары радиуса ε (*ε–окрестности точки* $\vec{x}_0$.)

Непрерывность

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $\vec{x} = (x_1, x_2, .., x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное вещественное число $f(x) = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, .., x_n)$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ от n переменных $x_1, x_2, .., x_n$. Множество D называется *областью определения* этой функции, а множество $E = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x), x \in D\}$ – *областью значений* функции f.

Будем считать, что f *непрерывна*, если $f(x_k) \to f(x), x_k \to x$. Для непрерывности функции *недостаточно непрерывности по каждой переменной*. Например, непрерывность по каждой из двух переменных x, y:

$$P(x_0, y_0)$$
$$x_k \to x_0, y_k \to y_0$$
$$f(x_k, y_0) = f(x_0, y_0), f(x_0, y_k) = f(x_0, y_0)$$

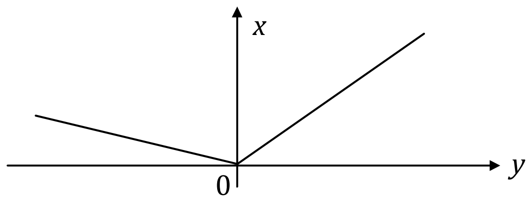
наблюдается в случае функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, \qquad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Здесь $f(x_k, 0) = 1, f(0, y_k) = 1$. Пусть $y = kx, k \in \mathbb{N}$, тогда

$$f(x,y) = f(x, kx) = \frac{\sqrt{1 + k^4}}{1 + k^2}.$$

Тогда становится ясно, что хоть и x, и y одновременно стремятся к нулю, пределы могут быть разными (из-за разных k):



Частная производная

Пусть $f = f(x, y, z)$. *Частной производной от f по x*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f'_x$$

называется производная от f по x при фиксированных y и z, рассматриваемых как параметры. Аналогично определяется производная по y и z. Таким образом, вместо одной производной в случае функций одной переменной у нас получается целый *вектор производных*, или *градиент* функции f

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

А частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f''_{xz}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f''_{yz}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''_{zz}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = f''_{zx}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = f''_{zy}$$

образуют *матрицу частных производных*

$$Df = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}.$$

Пример

$$f(x,y) = x^2 + \sin xy.$$

$$f'_x = 2x + y\cos xy\,, f'_y = x\cos xy$$
$$\operatorname{grad} f = (2x + y\cos xy)\vec{\imath} + (x\cos xy)\vec{\jmath}.$$

$$f''_{xx} = 2 - y^2\sin xy\,, f''_{xy} = \cos xy - xy\sin xy\,, f''_{yy} = -x^2\sin xy\,, f''_{yx} = \cos xy - xy\sin xy$$
$$Df = \begin{pmatrix} 2 - y^2\sin xy & \cos xy - xy\sin xy \\ \cos xy - xy\sin xy & -x^2\sin xy \end{pmatrix}.$$

Теорема (без доказательства).
Если в точке $P(x_0, y_0)$ существуют частные производные первого и второго порядка, а смешанные производные непрерывны (что важно), тогда справедливо равенство
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$
и матрица производных симметрична.

Этот полезный результат распространяется и на более высокие порядки производных. Скажем,
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$
Покажем, что условие непрерывности смешанных производных чрезвычайно важно. Возьмем
$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, f(0,0) = 0.$$

$$f'_x = y\frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$
$$f'_y = x^3\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$
Получили
$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = 1, f''_{yx} = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = 0, f''_{xy} \neq f''_{yx}.$$

Производная по направлению

Предел
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(\vec{x}_0 + \delta\vec{n})}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}},$$
где $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ – единичный направляющий вектор, называется *производной по направлению*.
При вычислении этого предела предполагается, что $\delta \to 0$, принимая положительные значения, т.е. производная по направлению – *правая производная* $f(\vec{x}_0 + \delta\vec{n})$ *по* δ.

Справедливо *равенство*
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{n}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{n}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{n}_z,$$
где $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y, \vec{n}_z$ – орты направления $\vec{n}$.

Доказательство:
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f\left(\vec{x}_0 + \vec{n}_x\delta_i + \vec{n}_y\delta_j + \vec{n}_z\delta_k\right) - f(\vec{x}_0)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{f\left(\vec{x}_0 + \vec{n}_x\delta_i + \vec{n}_y\delta_j + \vec{n}_z\delta_k\right) - f\left(\vec{x}_0 + \vec{n}_x\delta_i + \vec{n}_y\delta_j\right)}{\delta}$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\frac{f\left(\vec{x}_0+\vec{n}_x\delta_i+\vec{n}_y\delta_j\right)-f(\vec{x}_0+\vec{n}_x\delta_i\ )}{\delta}+\lim_{\delta\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+\vec{n}_x\delta_i)-f(\vec{x}_0\ )}{\delta}.$$

Рассматривая получившиеся после перегруппировки слагаемые как производные функций одной переменной, получим

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial f}{\partial z}\left(\vec{x}_0+\vec{n}_x\delta_i+\vec{n}_y\delta_j\right)n_z+o(1)+\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0+\vec{n}_x\delta_i)n_y+o(1)+\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)n_x=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}n_x+\frac{\partial f}{\partial y}n_y+\frac{\partial f}{\partial z}n_z.$$

Дифференцируемость. Дифференциал

Приращение значения функции одной переменной выражается как

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

Линейная часть приращения $A\Delta x=A\mathrm{d}x$ называется *дифференциалом* функции f и обозначается df. В случае дифференцируемости f ее дифференциал определяется формулой

$$\mathrm{d}f=f_x'\mathrm{d}x.$$

В случае многих переменных вводят *вектор приращения*

$$\vec{h}\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\mathrm{d}x\vec{\imath}+\mathrm{d}y\vec{\jmath}+\mathrm{d}z\vec{k}.$$

Приращение функции в этом случае запишется как

$$\Delta f(\vec{x})=f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-f(\vec{x}_0)=\vec{A}\,\vec{h}+o(|h|),$$

где $\vec{A}$ – вектор коэффициентов.
Если имеет место такое представление приращения, то функция f называется *дифференцируемой* в точке $\vec{x}_0$, а линейная часть приращения $\vec{A}\,\vec{h}$ – *дифференциалом* f в этой точке.

Теорема. Если функция f дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, то ее дифференциал равен

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

где dx, dy, dz – приращения независимых переменных.
Доказательство: приращение равно

$$\vec{h}=\mathrm{d}x\vec{\imath}+\mathrm{d}y\vec{\jmath}+\mathrm{d}z\vec{k}.$$

Соответственно дифференциал равен

$$\vec{A}\,\vec{h}=a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z,$$

где a_x, a_y, a_z – числовые коэффициенты. Выберем dx, dy и dz так, чтобы dy = dz = 0. Тогда получим

$$\vec{A}\,\vec{h}=a_x\mathrm{d}x,\quad a_x=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$a_y=\frac{\partial f}{\partial y},a_z=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Следовательно, искомая формула верна.

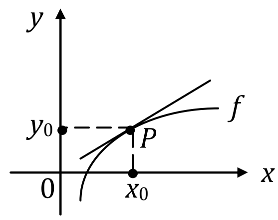
Обратный результат. Если функция f имеет непрерывные частные производные, она дифференцируема.
Доказательство:

$$f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-f(\vec{x}_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\left(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right)+$$
$$+\left(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right).$$

Применив теорему о среднем к данному выражению, получим

$$\frac{\partial f(x_0,y_0+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+o(\Delta x)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+o(\Delta y)=$$
$$=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y+o\left(\sqrt{\Delta y^2+\Delta x^2}\right).$$

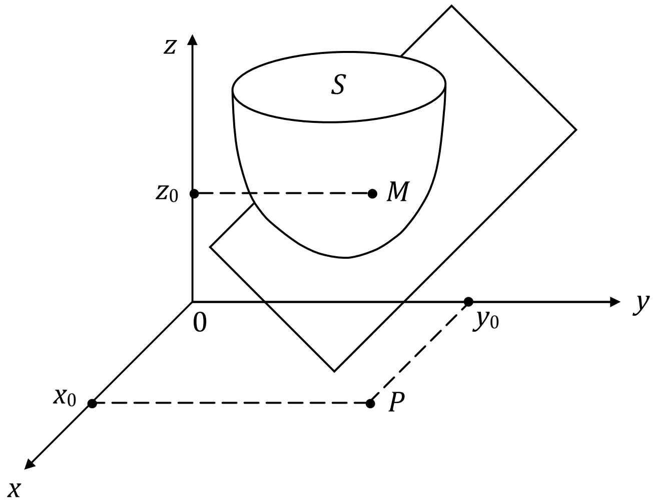
Геометрическая интерпретация дифференциала. Касательная плоскость. Нормаль



В одномерном случае мы рассматривали *касательную* с уравнением

$$y = y_0 + \mathrm{d}f = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Переместив начало координат в y_0, получим $y = \mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$.



В двумерном случае мы рассматриваем *касательную плоскость*. Через точку M графика $z = f(x, y)$ проводят 2 сечения – одно параллельно плоскости XOZ, другое – перпендикулярно ей. Очевидно, если рассматривать график f только в этих сечениях, то в них f – функция одной переменной : $f = f(x, y_0)$ и $f = f(x_0, y)$. Проведя касательные к f в точке $P(x_0, y_0)$ в этих сечениях, получим две перпендикулярные прямые, определяющие *касательную плоскость* в пространстве.

Из уравнений касательных в этих сечениях получим

$$z = z_0 + f'_x(x, y_0)\Delta x + o(\Delta x),$$
$$z = z_0 + f'_y(x_0, y)\Delta y + o(\Delta y).$$

Производные в точке P непрерывны, и следовательно можно устремить $x \to x_0, y \to y_0$:

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + o(\Delta x),$$
$$z = z_0 + f'_y(x_0, y_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Плоскость через эти две прямые

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Получили $\Delta z = \mathrm{d}f$. Отсюда можно записать уравнение плоскости в виде

$$z = z_0 + \mathrm{dz}.$$

Таким образом, *с геометрической точки зрения* дифференциал функции f в точке $P(x_0, y_0)$ для приращений Δx, Δy есть приращение аппликаты точки касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в (x_0, y_0) для приращений Δx, Δy.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания. Если уравнение поверхности имеет вид

$$F(x, y, z) = 0,$$

т.е. задано неявно, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

В случае задания поверхности в явной форме

$$z = f(x, y),$$

уравнение нормали к ней в точке $P(x_0, y_0)$ перепишется в виде

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Экстремальные свойства градиента

Для производной функции f по направлению вектора $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ можно записать

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = n_x \frac{\partial f}{\partial x} + n_y \frac{\partial f}{\partial y} + n_z \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{n} \cdot \operatorname{grad} f = |\operatorname{grad} f||\vec{n}| \cos\varphi = |\operatorname{grad} f| \cos\varphi.$$

Отсюда можно заключить, что производная по направлению тем больше, чем $\cos\varphi$ больше, и максимум достигается при $\varphi = 0$, т.е. когда $\vec{n} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} f$. Обратная ситуация при $\varphi = \pi$, т.е. когда $\vec{n} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} f$. Значит, функция многих переменных растет быстрее всего в направлении градиента, а убывает быстрее всего – в направлении, ему противоположном.

Инвариантность формы первого дифференциала

Возьмем $f(x_1, x_2, .., x_n) = \varphi(t)$. Первый дифференциал в точке P_0 имеет вид

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

Предположим теперь, что переменные сами являются функциями от t:

$$x_i = x_i(t), i = 1..n.$$

Тогда получим

$$f'_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

По существу, $\mathrm{d}f = \mathrm{d}\varphi$. Действительно, подставим в выражение для дифференциала значения $\mathrm{d}x_i$:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = \sum \varphi'_t \mathrm{d}t.$$

Это свойство первого дифференциала называется *инвариантностью*. Сохраняется форма дифференциала, когда переменные – функции многих переменных:

$$x_i = x_i(t_1, t_2, .., t_m), i = 1..n.$$

Тогда

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \mathrm{d}t_j.$$

Вновь подставим и убедимся в инвариантности df.

В то же время, уже второй дифференциал таким свойством не обладает:

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k,$$

т.к. последнее слагаемое в общем случае не равно нулю.

Формула Тейлора

Для функции одной переменной $f(x)$, имеющей n производных в окрестности точки x_0

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^i f(x_0)}{\partial x^2} \frac{1}{i!} (x - x_0)^i + r_n,$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^i f(x_0)}{\partial x^2} \frac{1}{i!} \Delta x^i + r_n,$$

где остаточный член $r_n = o(\Delta x^n)$.

Запишем формулу Тейлора для функции многих переменных $f(x_1, x_2, .., x_n)$, имеющей n непрерывных частных производных в окрестности точки P_0, до порядка l включительно.

В точке $P \in U_{P_0}$

$$f(P) = f(P_0) + \frac{\mathrm{d}f(P_0, \Delta x_1, .., \Delta x_n)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(P_0, \Delta x_1, .., \Delta x_n)}{2!} + .. + \frac{\mathrm{d}^{l-1} f(P_0, \Delta x_1, .., \Delta x_n)}{(l-1)!} + r_l,$$

где остаточный член

$$r_l = \frac{\mathrm{d}^l f(P_1, \Delta x_1, .., \Delta x_n)}{l!}, P_0 < P_1 < P.$$

Доказательство (для $n = 2$):

$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$$
$$\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$$
$$x = x_0 + t\Delta x, y = y_0 + t\Delta y$$

Получили функцию

$$f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y) = F(t)$$

Заметим, что $F(0) = f(x_0, y_0), F(1) = f(x_1, y_1)$. Поскольку F – функция одной переменной, для нее можно записать обычную формулу Тейлора

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + .. + \frac{F^{(l-1)}(0)}{(l-1)!} t^{l-1} + \frac{F^{(l)}(\vartheta)}{l!} t^l, \quad \vartheta \in (0,1).$$

Однако $F'(t)$– производная по направлению вектора, построенного по точкам P_0 и P_1:

$$F'(t) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}(x_0 + t\Delta x)'_t + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}(y_0 + t\Delta y)'_t = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\Delta y = \mathrm{d}f(P_0).$$

Аналогично при $P \to P_0$ получим

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2}\Delta y^2 + 2\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y = \mathrm{d}^2 f(P) \to \mathrm{d}^2 f(P_0).$$

и т.д. Окончательно

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0, y_0)}{1!} + .. + \frac{\mathrm{d}^{l-1} f(x_0, y_0)}{(l-1)!} + r_l = f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{1!} + .. + \frac{f(x_0, y_0)}{(l-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^{l-1} + r_l =$$
$$= f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{f(x_0, y_0)}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^i + r_l.$$

Исследование функций на экстремумы

Точка P_0 называется точкой *локального максимума*, если $\exists U_{P_0}: \forall P \in U_{P_0}\ f(P) \le P_0$. Аналогичным образом определяется точка *локального минимума*.

Необходимое условие экстремума
Если функция $f = f(x, y)$ дифференцируема, то в точке экстремума P_0 обязательно

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Решениями этой системы уравнений являются *стационарные точки*. Обоснование здесь следующее. По условию локального максимума

$$f(P) \le f(P_0), P \in U_{P_0}.$$

Тогда запишем формулу Тейлора

$$f(P) - f(P_0) = \mathrm{d}f(P_1 \Delta x, \Delta y), P_1 \in U_{P_0}.$$

Если бы дифференциал не равнялся нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \neq 0,$$

то можно было бы подобрать такие (достаточно малые) Δx и Δy, чтобы $\mathrm{d}f(P_1 \Delta x, \Delta y)$ мог быть как положительным, так и отрицательным. Но тогда ни минимума, ни максимума в окрестности U_{P_0} не существовало бы!

Достаточное условие экстремума

Пусть P_0 – стационарная точка функции f, причем эта функция дважды дифференцируема в окрестности точки P_0. Тогда можно записать

$$\Delta f(P) = f(P) - f(P_0) = \mathrm{d}^2 f(P_0, \Delta x, \Delta y).$$

Если P_0 – точка максимума, то второй дифференциал – квадратичная форма – должен удовлетворять условию

$$\mathrm{d}^2 f(P_0, \Delta x, \Delta y) < 0$$

(форма отрицательно определена). Аналогично, для наличия минимума квадратичная форма должна быть положительно определена.

Применим *критерий Сильвестра*: квадратичная форма

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

положительно определена, если все ее *главные миноры* положительны.

В случае функций двух переменных будем рассматривать определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что интересующая нас форма отрицательно определена (есть максимум), если $\Delta > 0, f''_{xx} < 0$, и положительно (есть минимум), если $\Delta > 0, f''_{xx} < 0$. Ни максимума, ни минимума нет при $\Delta < 0$. При $\Delta = 0$ требуется дополнительное исследование.

Замечание. Если некоторые из вторых дифференциалов равны нулю в точке P_0, приходится рассматривать дифференциалы высшего порядка. (Здесь ситуация похожа на поиск экстремумов функций одной переменной).

Примеры

1) $u = x^3 - 3x + y^2$.

$$u'_x = 3x^2 - 3, u'_y = 2y$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$P_0(1,0), P_0^*(-1,0)$ – стационарные точки.

$$u''_{xx} = 6x, u''_{yy} = 2, u''_{yx} = u''_{xy} = 0$$

$$P_0(1,0){:}\ \Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 - \min.$$

$$P_0^*(-1,0){:}\ \Delta^* = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 - \text{нет ни } \max, \text{ни } \min.$$

2) $u = x^3 + y^2$.

$$u'_x = 3x^2, u'_y = 2y$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$P_0(0,0)$ –стационарная точка.

$$u''_{xx} = 6x, u''_{yy} = 2, u''_{yx} = u''_{xy} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - \text{нужно исследовать дополнительно.}$$

Исследование. Зафиксировав $y = 0$, получим функцию одной переменной x^3, у которой экстремума при $x = 0$ нет. Следовательно, в (0,0) экстремума также нет.

3) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - x - y - z$.

$$u'_x = 2x - 1, u'_y = 4y - 1, u'_z = 6z - 1$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y - 1 = 0 \\ 6z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$$

$$u''_{xx} = 2, u''_{yy} = 4, u''_{zz} = 6, u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yx} = u''_{yz} = u''_{zx} = u''_{zy} = 0$$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

диагональная с положительными элементами. Следовательно, ее главные миноры положительны и форма положительно определена. Точка P_0 – минимум.

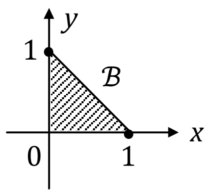
Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Теорема (без доказательства). Функция, заданная на замкнутом множестве $\mathcal{B}$, принимает на этом множестве наибольшее и наименьшее значение.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения

1) Найти стационарные точки, находящиеся внутри замкнутого множества.
2) Вычислить значения функции в этих точках.
3) Сравнить со значениями на границе множества.

Пример



$$z = 1 - x + x^2 + 2y.$$

$$\mathcal{B}: \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 1 \end{cases}$$

Решение.

$$z'_x = -1 + 2x, z'_y = 2$$

$$\begin{cases} -1 + 2x = 0 \\ 2 = 0 \end{cases}$$

Стационарных точек нет вообще. Исследуем границы множества.

a. $x = 0, z = 1 + 2y, y \in [0,1]$.

$$z'_y = 2 \neq 0 \text{ – экстремумов нет.}$$

Значения на концах отрезка:

$$z(0,1) = 3, z(0,0) = 1.$$

b. $y = 0, z = 1 - x + x^2, x \in [0,1]$.

$$z'_x = -1 + 2x = 0, x = \frac{1}{2}$$

$$z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{3}{4}, z(1,0) = 1, z(0,0) = 1.$$

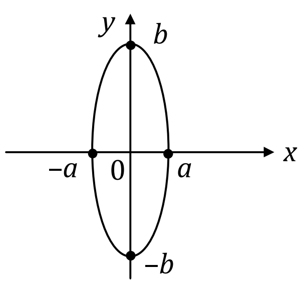
c. $y = 1 - x, x \in [0,1]$.

$$z = x^2 - 3x + 3$$

$$z'_x = 2x - 3, x = \frac{3}{2} \notin [0,1].$$

Ответ: $\max_{\mathcal{B}} z = z(0,1) = 3; \min_{\mathcal{B}} z = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{3}{4}.$

Условный экстремум



Рассмотрим следующий пример. Дана функция (квадрат расстояния от начала координат)

$$u = x^2 + y^2.$$

Очевидно, локального максимума у нее нет. Однако если искать максимум *на эллипсе*

$$G(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, b > a,$$

легко видеть, что $u_{\max} = b^2$.

Общая постановка задачи

Дана функция $u = F(P)$, где P – точка n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, и *уравнения связи*

$$\begin{cases} G_1(P) = 0 \\ \quad\vdots \\ G_m(P) = 0 \end{cases}.$$

Требуется найти локальный максимум (минимум) при условии, что все связи выполнены. Такой экстремум называется *условным* и отличается от обычного только тем, что «продвижение» ограничено кривыми, заданными уравнениями связи.

Необходимое условие экстремума

Каждой точке пространства P припишем координаты $(x_1, .., x_n, y_1, .., y_m)$, где переменные $x_1, .., x_n$ – *независимые*, а $y_1, .., y_m$ – *зависимые*. $P^0(x_1^0, .., x_n^0, y_1^0, .., y_m^0)$ – точка локального экстремума при соблюдении уравнений связи.

Предположим, в точке P^0 функциональный определитель:

$$\frac{D(G_1, .., G_m)}{D(y_1, .., y_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial y_{1m}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом систему уравнений связи можно разрешить, и

$$y_i = \varphi_i(x_1, .., x_n), i = 1,2, .. m,$$

где функции φ_i имеют непрерывные частные производные в точке $M^0(x_1^0, .., x_n^0)$.

Теперь можно заменить нашу функцию

$$F(P) = F\big(x_1, .., x_n, \varphi_1(x_1, .., x_n), .., \varphi_m(x_1, .., x_n)\big) \equiv \Phi(x_1, .., x_n).$$

Очевидно, найти если $F(P)$ достигает локального условного экстремума в точке P^0, то $\Phi(P)$ – в точке M^0, и наоборот. Запишем необходимое условие экстремума для $\Phi(P)$

$$\mathrm{d}\Phi(x_1^0, .., x_n^0) = 0.$$

Если это условие выполнено, то $M^0(x_1^0, .., x_n^0)$ – *стационарная точка* условного экстремума. Теперь, в силу инвариантности первого дифференциала можно записать

$$\mathrm{d}F(x_1^0, .., x_n^0, y_1^0, .., y_m^0) = 0.$$

Распишем (обозначение «$(\dots)_0$» означает «выражение $(\dots)$ в точке P^0»):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)_0 + .. + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1\right)_0 + .. + \left(\frac{\partial F}{\partial y_m}\mathrm{d}y_m\right)_0 = 0,$$

где первые n слагаемых – дифференциалы независимых переменных, а оставшиеся m – зависимых. Чтобы найти связь между этими дифференциалами, достаточно взять

$$\mathrm{d}G_i(P^0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial G_k}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k\right)_0 = 0.$$

Теперь вместо дифференциалов рассмотрим градиенты – $(n + m)$-мерные вектора

$$\operatorname{grad} G_i(P^0) = \left\{\frac{\partial G_i(P^0)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial G_i(P^0)}{\partial x_n}, \frac{\partial G_i(P^0)}{\partial y_1}, .., \frac{\partial G_i(P^0)}{\partial y_m}\right\}, i = 1..m,$$

$$\operatorname{grad} F(P^0) = \left\{\frac{\partial F(P^0)}{\partial x_1}, .., \frac{\partial F(P^0)}{\partial x_n}, \frac{\partial F(P^0)}{\partial y_1}, .., \frac{\partial F(P^0)}{\partial y_m}\right\}.$$

Для них справедлив (равносильный) набор утверждений

$$\operatorname{grad}_0 F \cdot \mathrm{d}\vec{z} = 0, \quad \operatorname{grad}_0 G_i \cdot \mathrm{d}\vec{z} = 0, i = 1..m.$$

Но если вектор $\mathrm{d}\vec{z}$ перпендикулярен градиентам $\operatorname{grad}_0 G_i$, он перпендикулярен подпространству натянутому на вектора G_i. Но он перпендикулярен и $\operatorname{grad}_0 F$. Отсюда

$$\operatorname{grad}_0 F \in \mathcal{L}(\operatorname{grad}_0 G_i\,, i \le m).$$

Тогда существуют такие числовые коэффициенты (*множители Лагранжа*) $\lambda_1, .., \lambda_m$, что $\operatorname{grad}_0 F = \lambda_1 \operatorname{grad}_0 G_1 + .. + \lambda_m \operatorname{grad} G_m$, или, в силу линейности градиента, $\operatorname{grad}_0(F + \lambda_1 G_1 + .. + \lambda_m G_m) = \operatorname{grad}_0 L = 0$. Градиент равен нулю только в том случае, когда его компоненты – частные производные – равны нулю.

Значит

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} =..\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial y_1} =..= \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0.$$

Получили *необходимое условие экстремума*:

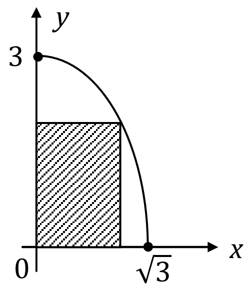
$$u = F(x_1,..,x_n), G_i(x_1,..,x_n) = 0, i = 1..m$$
$$L = F(x_1,..,x_n) + \lambda_1 G_1 + .. + \lambda_m G_m(x_1,..,x_n)$$
$$L'_{x_i} = 0, i = 1..n.$$

Достаточное условие экстремума

Для проверки стационарной точки P^0 на экстремум нужно сосчитать второй дифференциал d^2L. Поскольку среди слагаемых d^2L не все независимые, их можно выразить через остальные и подставить. Если получившаяся квадратичная форма положительно определена, в P^0 условный минимум, если отрицательно – условный максимум.

Пример

Вписать фигуру $y + x^2 - 3 = 0, 0 \le x \le \sqrt{3}$ прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат так, чтобы его площадь была максимальна.



$$S(x, y) = xy$$
$$L = xy + \lambda(x^2 + y - 3)$$
$$\begin{cases} L'_x = y + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \\ y + x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda^2. \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

Получили две точки: $P_0^0(1,2)$ и $P_1^0(-1,2)$. Вторая не удовлетворяет условию $0 \le x \le \sqrt{3}$, следовательно исследуем только $P_0^0(1,2)$.

$$S(P_0^0) = 2, L''_{xx} = 2\lambda = -2, L''_{yy} = 0, L''_{xy} = L''_{yx} = 1.$$
$$\mathrm{d}^2L = -2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Из уравнения связи

$$y + x^2 - 3 = 0$$
$$\mathrm{d}y + 2x\mathrm{d}x = 0$$
$$\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x.$$

Подставляем в дифференциал

$$\mathrm{d}^2L = -2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x(-2\mathrm{d}x) = -2\mathrm{d}x^2 - 4\mathrm{d}x^2 = -6\mathrm{d}x^2 < 0\ (\forall x) \Rightarrow \max.$$

Экзаменационные вопросы

Знаком * помечены вопросы для «умников» вроде составителя этого документа.

1) Неопределенный интеграл, его связь с определенным интегралом.
2*) Определенный интеграл. Схема определения.
3*) Формула Ньютона-Лейбница.
4*) Интегральная теорема о среднем.
5) Несобственный интеграл.
6) Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
7) Признаки сравнения для несобственных интегралов.
8*) Условия сходимости/расходимости для интегралов от гармонических функций $(1/x^{\alpha})$ с различными пределами интегрирования.
9) Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.
10) Признак Коши сходимости несобственных интегралов.
11) Длина кривой.
12) Формулы приближенного интегрирования (прямоугольники, трапеции, параболы).
13) Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.
14*) Критерий Коши (теоретический) сходимости числовых рядов.
15*) Сходимость/расходимость гармонических рядов $(1/k^{\alpha})$.
16) Признаки сравнения числовых рядов.
17) Признак Коши (практический) сходимости числовых рядов.
18) Признак Даламбера сходимости числовых рядов.
19*) Интегральный признак сходимости числовых рядов.
20) Сходимость рядов Лейбница.
21*) Признак Абеля-Дирихле условной сходимости числовых рядов.
22) Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
23) Признак Коши равномерной сходимости функциональных рядов.
24*) Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов.
25) Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов.
26*) Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов.
27) Радиус сходимости степенного ряда.
28*) Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
29*) Ряды Тейлора для элементарных функций.
30) Непрерывность функции многих переменных.
31) Частные производные.
32*) Градиент и его геометрический смысл.
33) Дифференциал функции многих переменных.
34*) Касательная плоскость к поверхности.
35) Геометрический смысл дифференциала.
36) Открытые и замкнутые множества.
37) Теорема о смешанных производных (формулировка).
38) Дифференциал второго порядка функции многих переменных (уметь выписывать). Дифференциалы высших порядков.
39*) Формула Тейлора для функции многих переменных.
40*) Необходимое условие экстремума для функции многих переменных.
41) Достаточное условие экстремума.
42) Условный экстремум.
43) Необходимое условие условного экстремума (метод множителей Лагранжа).
44) Частное и общее решение ДУ.
45) Интегральная кривая. Задача Коши.
46) Однородное ДУ. Каноническая подстановка.
47) Линейное уравнение. Схема решения.
48) Теорема о существовании и единственности.
49) Особые решения ДУ.
50) Преобразование Лапласа.
51) Теорема подобия.
52) Дифференцирование оригинала.
53) Дифференцирование изображения.
54) Интегрирование оригинала.
55) Интегрирование изображения.
56) Теорема запаздывания.
57) Теорема смещения.
58) Изображение степенной функции.
59) Изображения синуса и косинуса.
60) Схема решения задачи Коши операционным методом.
61) Решение системы линейных ДУ операционным методом.