

3. Случайные процессы в автоматических системах управления

3.1. Введение

Системы, сигналы в которых характеризуются случайными функциями и процессами называются системами с случайными сигналами или стохастическими системами.

Приведем несколько примеров, наиболее распространенных, когда процессы в системах имеют случайный характер.

1. Система регулирования электрического напряжения на синхронном генераторе, нагрузка которого зависит в значительной степени от возможного потребления электрической энергии (рис.3.1).

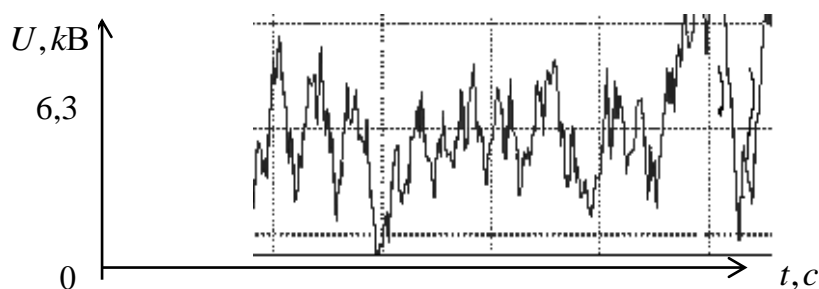


Рис.3.1

2. Системы управления транспорта, перемещающегося по железным дорогам, на которые воздействуют во время пути возмущения случайного характера в виде переменной нагрузки, потерь вызванных состоянием железнодорожного пути, порывы ветра в непогоду и т.п.

3. Системы управления движением кораблей в условиях волнения и перемен ветра

4. Следящие системы управления, для которых входной сигнал или произвольный или случайный, и в которых действуют обычно помехи случайного типа, вызванные средствами измерения, перемещения и преобразования сигналов управления.

5. Случайные сигналы, берущие начало в результате действия возмущений, внутренних и внешних, могут в значительной степени воздействовать на работу систем управления, что обуславливает необходимость делать их оценку и минимизацию их влияния посредством фильтрации сигналов управления.

Отсюда появляется задача синтеза систем по минимуму средне-квадратичной ошибки, рассчитанной по вероятностным характеристикам сигналов.

Чтобы решить такую задачу, появляется необходимость познакомиться с основами теории случайных функций и случайных процессов.

3.2. Основные характеристики случайных функций и случайных процессов
Называют функцию $x(t)$ случайной, если она в результате опыта может принять

непредвиденную заранее форму. Совокупность случайных функций, порожденных одной и той же природой, называется случайным процессом.

Случайный процесс нам дает случайное описание некоего физического явления.

Одна или множество случайных реализаций, предназначенных для анализа, изучаются как выборка из бесконечной совокупности (рис. 3.2). Если фиксируется значение времени $t = t_1$, получаем совокупность значений при $t = t_1$. Эта совокупность $x_1, x_2, \dots, x_n|_{t=t_1}$ называется сечением случайного процесса.

Основные характеристики случайных процессов аналогичны характеристикам случайных величин, но в отличие от последних, это не числа, а функции.

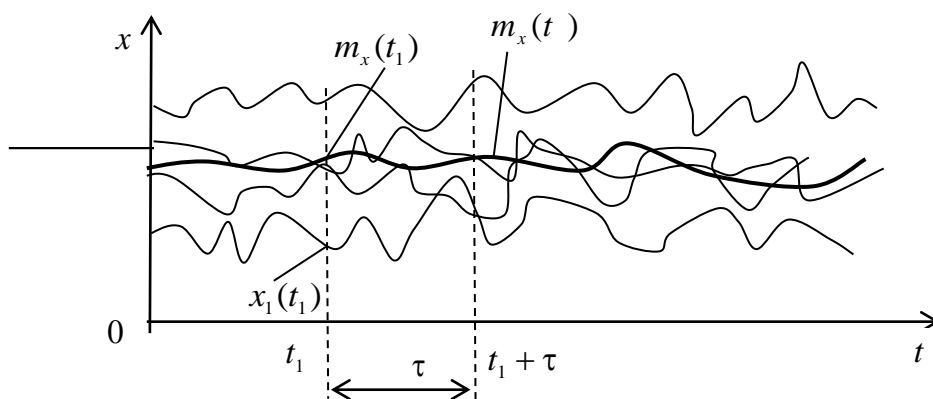


Figure 3.2

Называют математическим ожиданием случайного процесса функцию $m_x(t)$, которая равна математическому ожиданию сечения, соответствующего моменту времени t :

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Под понятием корреляционной функции (автокорреляционной функции) понимают функцию двух аргументов $R_x(t, t + \tau)$, которая для всякой пары значений времени равна моменту корреляции соответствующих сечений случайного процесса:

$$R_x(t, t + \tau) = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau)],$$

где $\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ – центрированное значение случайной функции.

При $\tau = 0$ автокорреляционная функция равна дисперсии случайной функции для соответствующего сечения: $R_x(t, t + \tau)|_{\tau=0} = M[X^2(t)] = D_x(t)$.

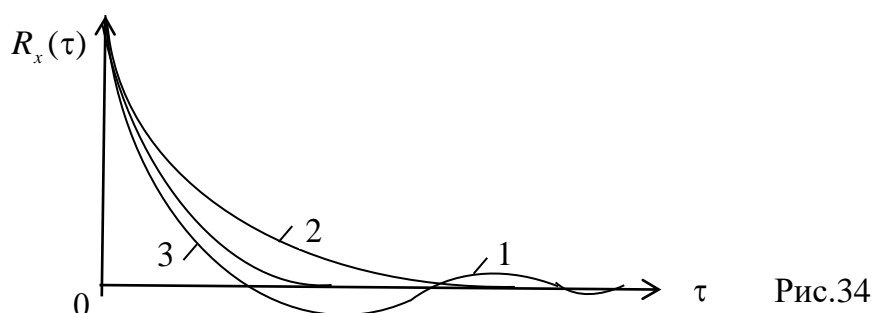
Наблюдают часто на практике случайные процессы, которые развиваются во времени, имеют колебания вокруг некоторого среднего значения и, вместе с этим, ни амплитуда, ни характер колебаний, не меняются со временем. Такие процессы называются стационарными..

Вообще говоря, называют процесс стационарным случайный процесс, характеристики которого не зависят от времени. Если взять в качестве таких характеристик математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию, условия стационарности примут такой вид:

$$m_x(t) = m_x = const; \quad D_x(t) = D_x = const; \quad R_x(t, t + \tau) = R_x(\tau).$$

Корреляционная функция $R_x(\tau)$ характеризует случайную связь между сечениями, расположенными на расстоянии τ . Важно подчеркнуть, что не имеет никакого значения, где находится этот отрезок времени. При $\tau = 0$ автокорреляционная функция $R_x(\tau)$ максимальна и равна дисперсии. При увеличении времени τ случайная связь между сечениями ослабляется. Эта зависимость $R_x(\tau)$ в функции τ показана на рис.3.3.

На рис.3.4. показаны корреляционные функции трех стационарных процессов, имеющих одну и ту же дисперсию, но имеющие различные внутренние свойства. Колебания корреляционных функций свидетельствуют о скрытой периодичности (кривая (1)). Кривые (2) и (3) не содержат периодических составляющих. Процесс, характеризуемый кривой (3), содержит гармоники высокой частоты, больше, чем процесс, представленный кривой (2), и поэтому связь между сечениями ослабляется более быстро.



Среди случайных стационарных процессов различают процессы эргодические.

Эргодичность случайных процессов это очень важное свойство для практики. Свойство эргодичности, это возможность определить случайные характеристики случайного процесса по единственной реализации случайной функции долгой длительности.

Свойство эргодичности записывается следующим образом:

$$M[X(t)] = m_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t) dx. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что для эргодического процесса среднее значение случайной функции $x(t)$, будучи рассчитанное по одной реализации в интервале $[-T, T]$ при $T \rightarrow \infty$, равно среднему значению, рассчитанному по совокупности реализаций. Имеем здесь: $f(x, t)$ – плотность распределения случайной функции, определенная в сечении в момент времени t .

Заметим, что для стационарного процесса $f(x, t) = f(x)$ и $m_x(t) = m_x$.

Корреляционная функция стационарного эргодического процесса определяется по выражению $R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt,$ (3.2)

где $\dot{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ – центрированное значение случайной функции.

При $\tau = 0$ $R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{x}^2(t) dt.$

Распределение дисперсии случайной стационарной функции по частотам колебаний, имеющих место в составе случайной функции, называется спектральной плотностью, $S_x(\omega)$, которая связана с корреляционной функцией $R_x(\tau)$ прямым преобразованием Фурье:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

Подставляя выражение корреляционной функции в выше приведенное выражение, получим

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{x}(t) \dot{x}(t+\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{x}(t) e^{-j\omega t} dt \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t+\tau) \cdot e^{-j\omega(t+\tau)} d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X(-j\omega)X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(j\omega)|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следовательно, спектральная плотность случайного процесса пропорциональна квадрату амплитуды (мощности спектра случайного сигнала).

Поэтому часто называют спектральную плотность энергетическим частотным спектром.

Обратное преобразование Фурье используется на практике, чтобы определить корреляционную функцию по спектральной плотности.

$$: R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.5)$$

Это выражение служит также, чтобы определить дисперсию случайной функции. Принимая $\tau = 0$, приходим к формуле $R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$, (3.6)

известной как выражение Парсеваля.

Практический пример

Ставится задача, построить кривую спектральной плотности случайного стационарного процесса $X(t)$, имеющего $R_x(\tau) = N \cdot \delta(\tau)$.

Находим $S_x(\omega)$ с помощью прямого преобразования

$$\text{Фурье: } S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} N \cdot \delta(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt = N.$$

Приняли во внимание, что $e^{-j\omega\tau} \Big|_{\tau=0} = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$.

Следовательно, кривая спектральной плотности это прямая, параллельная оси абсцисс (рис.3.4,а).

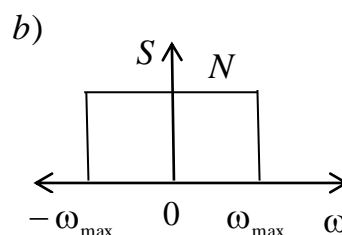
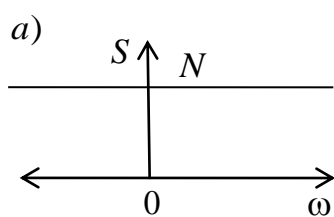


Рис3.5

Это означает, что рассматриваемый процесс содержит все частоты от $-\infty$ до $+\infty$ с одинаковой интенсивностью. Такой процесс называется «белый шум».

Определим дисперсию случайной функции, используя выражение Парсеваля:

$$R_x(0) = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N \cdot d\omega = \frac{N \cdot \omega}{2\pi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty. \quad (3.7)$$

Из этого следует, чтобы получить сигнал типа «белый шум» необходимо иметь бесконечный источник энергии, что невозможно физически.

Заметим, что из-за инерционности систем автоматического управления все высокие частоты задерживаются. Поэтому интересно определить характеристики случайного процесса, у которого спектр частот ограничен (рис.3.6б):

$$S_x(\omega) = \begin{cases} N, & \text{avec } |\omega| \leq \omega_{\max} \\ 0, & \text{avec } |\omega| > \omega_{\max} \end{cases}.$$

Воспользуемся снова выражением, в котором представим $e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau$; учитывая, что интеграл функции в симметричных пределах равен нулю.

Запишем окончательно
$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} N \cdot \cos \omega\tau d\omega = \frac{N \cdot \sin \omega_{\max} \tau}{\pi\tau}.$$

Дисперсия случайного процесса
$$D_x = R_x(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{N \cdot \sin \omega_{\max} \tau}{\pi\tau} = \frac{N}{\pi} \omega_{\max}.$$

Следовательно, требуемая мощность источника энергии случайного процесса, спектральная плотность которого представлена на рис. 3.7,б, ограничена частотой ω_{\max} .

3.3. Прохождение случайного сигнала через линейную систему

Определим зависимость между случайным сигналом, приложенным к входу системы с передаточной функцией $W(s)$, и сигналом на выходе $y(t)$ (рис 3.5,а).

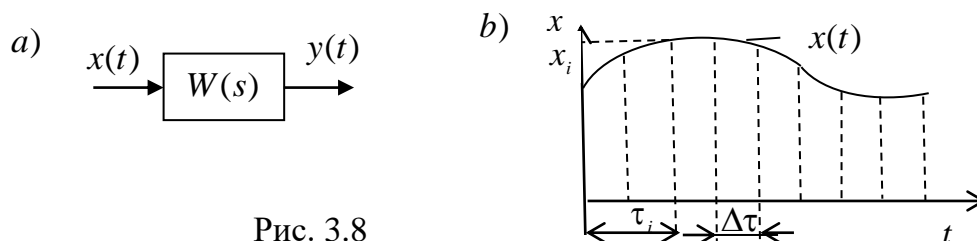


Рис. 3.8

Представим площадь между осью t и кривой $x(t)$ в виде последовательности прямоугольников длительностью $\Delta\tau$ и амплитудой $x_i = x(\tau_i)$, где $\tau_i = i\Delta\tau$ (рис.3.,b).

Уменьшая $\Delta\tau$, ответ системы на каждый i -тый импульс может быть заменен на ответ системы на δ -функцию площадью $A_i = x_i\Delta\tau_i$. Реакция системы на δ -функцию хорошо известна, потому что она называется функцией веса (импульсная переходная характеристика) : $\varpi(t) = L^{-1}\{W(s)\}$.

Реакция на импульсное воздействие типа $\delta(t - \tau_i)$ площадью $A_i = x_i \Delta \tau_i$ равна

$$y(t - \tau_i) = \varpi(t - \tau_i) x(\tau_i) \Delta \tau.$$

Реакция на серию импульсов будет следующей:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n y(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^n \varpi(t - \tau_i) x(\tau_i) \Delta \tau.$$

Переходя к пределу при $\Delta \tau \rightarrow 0$ имеем $y(t) = \int_0^t \varpi(t - \tau) x(\tau) d\tau$ и вместе заменой

переменных $t - \tau = \theta$

$$y(t) = \int_0^t \varpi(\theta) x(t - \theta) d\theta.$$

Полученные выражения представляют различные формы записи интеграла Дюамеля, или свертки двух функций $\varpi(t)$ и $x(t)$.

Предположим теперь, что $x(t)$ - сигнал случайный, стационарный и эргодический.

Вследствие линейности пропускания сигналов сигнал на выходе $y(t)$ будет также

случайный стационарный и эргодический $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(\theta) x(t - \theta) d\theta.$

Находим выражение корреляционной функции сигнала $y(t)$. В общих выражениях

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) \cdot y(t + \tau) dt.$$

Подставим в это выражение $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta) x(t - \theta) d\theta$ и $y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) x(t + \tau - \eta) d\eta.$

Будем иметь тогда $R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(\theta) x(t - \theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) x(t + \tau - \eta) d\eta.$ В нем

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = 1.$ Остаток выражения запишется следующим образом:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \theta) x(t + \tau - \eta) dt \right] d\eta.$$

Поскольку $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \theta) x(t + \tau - \eta) dt = R_x(\tau + \theta - \eta)$, имеем

окончательно :

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) R_x(\tau + \theta - \eta) d\eta. \quad (3.8)$$

Выражение, только - что написанное, фиксирует связь между корреляционными функциями сигналов на выходе и на входе. Использование этого выражения для практических расчетов, однако, достаточно сложное. Более простое выражение получается для спектральных мощностей сигналов на входе и на выходе. Для этой цели применим прямое преобразование Фурье для $R_y(\tau)$:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) R_x(\tau + \theta - \eta) d\eta \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta) \cdot e^{j\omega\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau + \theta - \eta) e^{-j\omega(\tau + \theta - \eta)} d\tau.$$

В полученном выражении $\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta) \cdot e^{j\omega\theta} d\theta = W(-j\omega)$; $\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta = W(j\omega)$;

$\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau + \theta - \eta) e^{-j\omega(\tau + \theta - \eta)} d\tau = S_x(\omega)$. Имеем окончательно

$$S_y(\omega) = W(-j\omega)W(j\omega)S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (3.9)$$

Следовательно, имея в распоряжении $R_x(\tau)$ или $S_x(\omega)$ и динамические характеристики объекта управления, можно определить характеристики случайного сигнала на выходе объекта. Такие же выражения могут быть использованы для соответствующего выбора параметров системы, таким образом, чтобы влияние случайных возмущений на функционирование системы было бы минимизировано.

Рассмотрим частные случаи, очень важные при проходе сигналов сквозь линейную систему.

Предположим, что система, имеющая передаточную функцию $W(j\omega) = j\omega$ подвержена воздействию случайного сигнала $S_x(\omega)$. Тогда для сигнала выхода имеем $S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$. Когда система осуществляет двойное дифференцирование $S_x(\omega)$ умножается на ω^4 . Следовательно, в случае дифференцирования случайного сигнала составляющие высокой частоты увеличиваются значительно более быстро и более сильно, чем составляющие низкой частоты. Значит, в случае наличия случайных помех нельзя вводить в систему корректирующие цепи дифференцирующего свойства. Иначе можно получить значительное ухудшение условий функционирования системы управления.

Спектральная плотность на выходе системы равна спектральной плотности на входе, поделенной на квадрат, в случае интегрального характера свойств системы управления. Это означает, что составляющие высокой частоты будут ослабляться, и сигнал на выходе системы будет сглажен.

3.4. Определение ошибок системы управления, подверженной воздействию случайных сигналов

Мы рассмотрим теперь замкнутую систему управления, у которой внешние сигналы являются случайными (рис.3.6).

На рис. 3.6. имеем:

– $g(t)$ - случайное управляющее воздействие с корреляционной функцией $R_g(\tau)$;

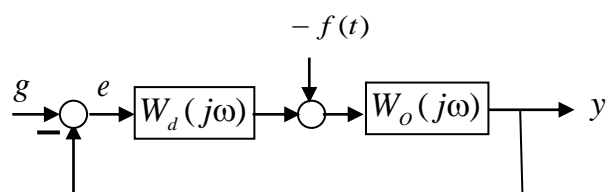


Рис.3.6

– $f(t)$ случайное возмущение с известной корреляционной функцией $R_f(\tau)$;

– $e(t)$ - ошибка системы;

– $W_o(j\omega)$ - передаточная функция объекта управления;

– $W_d(j\omega)$ - передаточная функция устройства управления.

Вариант 1. Предположим, что: 1) $g(t)$ - один сигнал, воздействующий на систему, который является случайным, стационарным со спектральной плотностью $S_g(\omega)$; 2) $f(t) = 0$.

Спектральная плотность ошибки $e(t)$ в соответствии с общим выражением

$$S_{eg}(\omega) = |W_{eg}(j\omega)|^2 \cdot S_g(\omega),$$

где $W_{eg}(j\omega) = \frac{1}{1 + W_o(j\omega)W_d(j\omega)}$ - передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

С целью определения корреляционной функции ошибки необходимо

воспользоваться обратным преобразованием Фурье $R_{eg}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{eg}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$.

Полагая $\tau = 0$, приходим к выражению Парсеваля (3.6)

$$D_{eg} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{eg}(\omega) d\omega.$$

Среднеквадратическая ошибка $\beta_{eg} = \sqrt{D_{eg}}$.

Вариант 2. Предположим теперь, что $g(t) = 0$ и $f(t)$ - случайный стационарный сигнал со спектральной плотностью $S_f(\omega)$.

Из первого варианта имеем $S_{ef}(\omega) = |W_{ef}(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega)$,

где $W_{ef}(j\omega) = \frac{-W_o(j\omega)}{1 + W_o(j\omega)W_d(j\omega)}$ - передаточная функция замкнутой системы

управления по ошибке, вызванной действием внешнего сигнала возмущения на входе объекта управления. Аналогично первому варианту:

$$R_{ef}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ef}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

$$D_{ef} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ef}(\omega) d\omega.$$

$$\beta_{ef} = \sqrt{D_{ef}}.$$

Вариант 3. Примем следующие условия: на входе системы управления действуют одновременно два случайных сигнала $g(t)$ и $f(t)$. Имея в виду, что наша система линейная,

для неё справедлив принцип суперпозиции:

$$D_e = D_{eg} + D_{ef} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [|W_{eg}(j\omega)|^2 \cdot S_g(\omega) + |W_{ef}(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega)] d\omega. \quad (3.10)$$

В случае, если управляющий сигнал связан корреляционной функцией с сигналом возмущения, выражение под знаком интеграла будет следующим:

$$S_e(\omega) = |W_{eg}(j\omega)|^2 \cdot S_g(\omega) + |W_{ef}(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) + W_{eg}(-j\omega)W_{ef}(j\omega)S_{gf}(\omega) + W_{eg}(j\omega)W_{ef}(-j\omega)S_{gf}(\omega), \quad (3.11)$$

где $S_{gf}(\omega)$ - функция взаимной корреляции сигнала управления $g(t)$ и сигнала возмущения $f(t)$.

3.5. Синтез систем управления по минимуму средней квадратичной ошибки

Во время синтеза системы может оказаться ситуация, при которой два сигнала: сигнал управления и сигналы возмущения, оба имеют случайный характер. В таком случае принципиальная задача синтеза системы: определить параметры системы, доставляющие минимум средней квадратической ошибки, значение которой определяется с помощью следующего выражения:

$$\sigma_e^2 = D_e = R_e(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^2(t) dt = MIN. \quad (3.12)$$

Можно обеспечить этот минимум двумя путями:

- 1) осуществить параметрический синтез, то-есть, определить параметры системы, без изменения её структуры, доставляющие минимум σ_e^2 ;
- 2) определить структуру и параметры системы, обеспечивающие минимум σ_e^2 (структурно-параметрический синтез).

Параметрический синтез осуществляется в следующей последовательности.

1. Определение корреляционной функции полезного сигнала и сигнала возмущения по практическим экспериментальным данным. Затем делаем прямое преобразование Фурье корреляционных функций и приходим к

спектральным плотностям: $S_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$.

Учитывая, что $R_g(\tau)$ - функция четная и что $e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$, получаем

$$S_g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (3.13)$$

2. Рассчитываем передаточные функции системы с обратной связью для ошибки, вызванной случайным сигналом управления $W_{eg}(j\omega)$ и возмущающим воздействием $W_{ef}(j\omega)$.

3. Используя соответствующие выражения, рассчитываем спектральную плотность общей ошибки $S_e(\omega)$.

4. Определяем дисперсию ошибки по выражению Парсеваля как функцию параметров системы α_i , где $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, - коэффициенты и постоянные времени элементов системы.

5. Определяем числовые значения параметров, решая систему уравнений $\partial D_e / \partial \alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$.

6. Подставляя числовые значения параметров, определенных в п.5, в выражение

$D_e(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, получаем $D_{e\min}$ и среднеквадратичную ошибку $\sigma_{e\min} = \sqrt{D_{e\min}}$.

Если $\sigma_{e\min} \leq \sigma_{eadm}$, где σ_{eadm} - допустимая ошибка, означает, что задача решена. Если неравенство не выполняется, необходимо приниматься за структурно-параметрический синтез системы.

Структурно-параметрический синтез выполняется на базе метода оптимальной фильтрации Винера. Презентация метода делается на рис.11.7.

Здесь: канал I – осуществляет желаемую передачу входного сигнала $u(t)$ по следующему выражению:

$$L\{y^*(t)\} = W(s) \cdot L\{u(t)\}.$$

Второй канал II – передача, осуществляемая оптимальной системой $W_{opt}(s)$, в присутствии $f(t)$. В связи с этим ошибка системы $\Delta(t) = y^*(t) - y(t)$ должна удовлетворять критерию

$$\sigma_{\Delta}^2 = D_{\Delta} = R_{\Delta}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \Delta^2(t) dt = MIN.$$

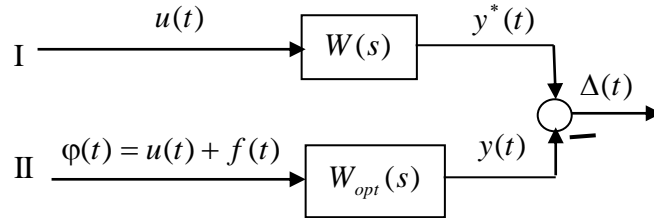


Рис.3.7

Можно рассматривать систему $W_{opt}(s)$ как оптимальный фильтр сигнала $\varphi(t)$. Прежде, чем решать предложенную задачу, рассмотрим зависимость между корреляционными функциями сигналов на входе и на выходе $y(t)$. Запишем выражение взаимной корреляционной функции:

$$R_{yx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t)x(t-\tau) dt.$$

Используя выражение $y(t) = \int_0^t \varpi(\theta)x(t-\theta)d\theta$, приходим к следующей форме :

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t-\tau) dt \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta)x(t-\theta)d\theta$$

Или изменяя последовательность интегрирования, имеем

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta)R_x(\tau-\theta)d\theta. \quad (3.14)$$

Полученное выражение называется уравнением Винера- Хопфа.

Используя прямое преобразование Фурье, приходим к замечательному выражению

$$S_{yx}(\omega) = W(j\omega)S_x(\omega). \quad (3.15)$$

Заметим, что полученное выражение позволяет определить частотный образ системы $W(j\omega)$ по реализациям сигналов на входе и на выходе (результаты пассивного эксперимента), то-есть, без активного вмешательства в исследуемый процесс:

$$W(j\omega) = S_{yx}(\omega) / S_x(\omega).$$

Определим дисперсию ошибки, учитывая $\Delta(t) = y^*(t) - y(t)$:

$$D_{\Delta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[y^*(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\theta)\varphi(t-\theta)d\theta \right]^2 dt.$$

Норберт Винер доказал , что условием необходимым и достаточным минимума D_{Δ} является то, что функция веса $\varpi(\eta)$ должна быть решением уравнения Винера- Хопфа (3.14):

$$R_{y^* \varphi}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi_{opt}(\eta) R_{\varphi}(\theta - \eta) d\eta.$$

Имеем тогда,

$$W_{opt}(j\omega) = S_{y^* \varphi}(\omega) / S_{\varphi}(\omega).$$

Но частотные характеристики, определенные по этому выражению $W_{opt}(j\omega)$ в большинстве практических случаях имеют нереализуемые свойства, так как система с $W_{opt}(j\omega)$ будет неустойчивой.

В этой связи для отыскания оптимальной функции $W_{opt}(j\omega)$, удовлетворяющей условиям устойчивости, применяют разложение $S_{\varphi}(\omega)$ на комплексные множители:

$$S_{\varphi}(\omega) = |\Psi^2(j\omega)| = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega).$$

Из этого следует, что
$$W_{opt}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \frac{S_{y^* \varphi}}{\Psi(-j\omega)}.$$

Н Винер доказал, что можно определить оптимальную передаточную функцию следующим образом:

$$W_{opt}(j\omega) = B(j\omega) / \Psi(j\omega), \quad (3.16)$$

где

$$B(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t) e^{-j\omega t} dt; \quad \beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{y^* \varphi}}{\Psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.17)$$

Example определения $W_{opt}(j\omega)$.

Пусть спектральная плотность управляющего сигнала $S_u(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$; а у помехи типа белого шума $S_f(j\omega) = c^2$. Причем, известно, что $u(t)$ и $f(t)$ не коррелированы. Необходимо найти $W_{opt}(j\omega)$ следящей системы.

Решение Для следящей системы $W(s) = 1$. Поэтому $y^*(t) = u(t)$. Учитывая, что $\varphi(t) = u(t) + f(t)$, можно написать:

$$S_{y^* \varphi}(\omega) = S_u(\omega); \quad S_{\varphi}(\omega) = S_u(\omega) + S_f(\omega);$$

принято в рассмотрение здесь, что $S_{uf}(\omega) = S_{fu}(\omega) = 0$ как для сигналов, которые не коррелированы. Подставляя известные выражения спектральной плотности, полученные

выше, получаем в нашем случае:
$$S_{y^* \varphi} = \frac{1}{1 + \omega^2}; \quad S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} + c^2 = \frac{1 + c^2 + c^2 \omega^2}{1 + \omega^2}.$$

Разложим последнее выражение на сопряженные множители:

$$S_{\varphi}(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = \frac{\sqrt{1 + c^2} + j\omega c}{1 + j\omega} \cdot \frac{\sqrt{1 + c^2} - j\omega c}{1 - j\omega}.$$

Вычисляем в соответствии с ранее написанными выражениями:

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{y^* \varphi}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - j\omega) e^{j\omega t} d\omega}{(1 + \omega^2)(\sqrt{1 + c^2} - j\omega c)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{(1 + j\omega)(\sqrt{1 + c^2} - j\omega c)}.$$

Разложив функцию под знаком интеграла на простые дроби, получаем

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+j\omega)(c+\sqrt{1+c^2})} + \frac{c}{(c+\sqrt{1+c^2})(\sqrt{1+c^2}-j\omega c)} \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

Для вычисления $B(j\omega)$ необходимо взять прямое преобразование Фурье $\beta(t)$, которое, в свою очередь, результат обратного преобразования Фурье выражения, стоящего в квадратных скобках. Следовательно, $B(j\omega)$ будет равен этому выражению в квадратных скобках. Исходя из условий реализуемости $W(s)$, отбрасываем слагаемые подынтегральной функции, имеющей корни в правой полуплоскости. Тогда

$$B(j\omega) = \int_0^{\infty} \beta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{c+\sqrt{1+c^2}} \frac{1}{1+j\omega}.$$

Искомая передаточная функция примет вид

или
$$W_{opt}(j\omega) = \frac{k_{opt}}{T_{opt} j\omega + 1},$$

где
$$k_{opt} = \frac{1}{(c+\sqrt{1+c^2})(\sqrt{1+c^2})}; \quad T_{opt} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Таким образом, оптимальный фильтр в данном случае представляет собой апериодическое звено первого порядка.

В заключение заметим, что решение задачи оптимальной фильтрации может быть также произведено с помощью фильтра Калмана. В этом методе предполагается, что на вход системы поступает аддитивная смесь управляющего воздействия $u(t)$ и случайного процесса Маркова и помеха $f(t)$, представляющая собой гауссовский «белый» шум. Сигналы $u(t)$ и $f(t)$ не коррелированы. Физически реализуемый линейный оператор замкнутой системы, при котором процесс $y(t)$ на выходе системы является оптимальным по критерию минимума среднеквадратической ошибки, находится по специально разработанному алгоритму. Этот алгоритм достаточно громоздок и, в частности, связан с решением дифференциального уравнения Риккати, для чего, как правило, требуется применять численные методы с использованием компьютерных технологий. В конечном итоге, алгоритм Калмана дает тот же результат, что и алгоритм Винера, но в отличие от последнего, позволяет синтезировать оптимальные фильтры не только для установившегося, но и для переходного режимов, при случайных нестационарных входных воздействиях.